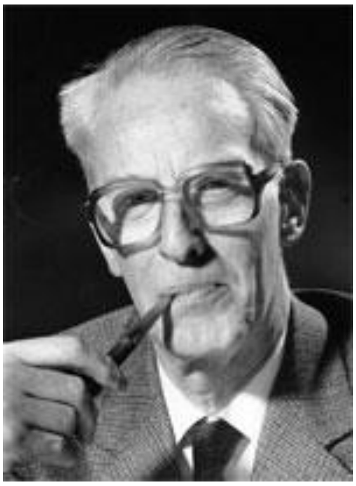
Geodetisch-Historische Monografieën Nr. 4

Ontwikkeling van het vakgebied sinds de Franse tijd

De Delftse School

De ontwikkeling van een kwaliteitstheorie voor geodetische metingen 1930-1980



Martien Molenaar

Stichting De Hollandse Cirkel voor de Geschiedenis der Geodesie

Geodetisch-Historische Monografieën Nr.4

Ontwikkeling van het vakgebied sinds de Franse tijd

De Delftse School

De ontwikkeling van een kwaliteitstheorie voor geodetische metingen, 1930-1980

Martien Molenaar

Colophon

ISBN: 978-90-83062-30-3

NUR-code: 600

Tweede, gecorrigeerde versie, januari 2021

© 2020 Stichting De Hollandse Cirkel

Uitgever: Stichting De Hollandse Cirkel
Postbus 9046
7300 GH Apeldoorn
www.hollandsecirkel.nl

Deze uitgave is uitsluitend beschikbaar als digitaal bestand.

Toen dacht ik .... aan de vraag van Bridgeman ..... welke coördinaten Einstein eigenlijk gebruikte.... De coördinatendefinitie is nog slechter dan die van het Kadaster, hij wordt namelijk geheel gepasseerd.

Baarda in een brief dd. 28-juli-1997

Voorwoord

In het najaar van 1967 volgde ik met een aantal nieuwe studiegenoten de eerste colleges in de Geodesie in Delft. Daarin werden we ingeleid in de grondbeginselen van het voor ons nieuwe vakgebied. Eén serie colleges betrof een inleiding in de vereffeningstheorie. Wat die inhield was toen nog een groot vraagteken. Als kennismaking moesten we een eenvoudige oefening doen. We kregen een plankje voorgezet van ongeveer een meter lang. Op dat plankje waren vier houtblokjes bevestigd op een onderlinge afstand van ca. 30 centimeter. In die blokjes waren ruwe gaten gemaakt, die opgevuld waren met was. De opdracht was om in ieder blokje, in de was, een pennetje te steken zodat dat midden in het blokje stond. We moesten de afstanden tussen de pennetjes meten met een liniaal. Door deze afstanden op te tellen konden we dan afstand tussen het midden van het eerste en het vierde blokje berekenen. En wat bleek? De resultaten van de twintig studenten vertoonden een flinke spreiding.

Daarmee werd duidelijk gemaakt dat het begrip “afstand” of “lengte” wiskundig wel scherp gedefinieerd was, maar dat toepassing van dit begrip bij het meten in de fysieke werkelijkheid niet zo eenvoudig was. Sterker nog, het bleek dat het begrip “lengte” niet eenvoudig te duiden was en dat het ook niet mogelijk was om daar een eenduidige waarde aan toe te kennen. Ons werd duidelijk gemaakt dat in deze situatie het begrip “ware waarde” geen betekenis heeft. Bij echte metingen in de werkelijke wereld moeten we accepteren dat herhaling van metingen variabele uitkomsten geeft. En daarmee werd aangetoond waarom de Vereffeningstheorie, gebaseerd op de Methode der Kleinste Kwadraten, van belang was voor geodeten.

Tijdens de verdere studie bleek dat men in Delft opnieuw de grondslagen van deze theorie onderzocht. In het begin van de twintigste eeuw werd fundamenteel nagedacht over de betekenis van wiskundige modellen voor de beschrijving van natuurlijke fenomenen. De hierboven beschreven oefening was een illustratie van dat probleem. Een bredere groep van denkers (zoals wiskundigen, natuurkundigen en filosofen) worstelde met deze materie en men beschikte toen nog niet over een passend taalgebruik om deze problematiek helder te verwoorden. In de periode, van ca. 1930 tot 1980, die in deze monografie wordt behandeld, kreeg de “Delftse School” in de Geodesie vorm, eerst onder leiding van Jacob Menno Tienstra en daarna van zijn opvolger Willem Baarda. Hun worsteling gedurende deze 50 jaren, die hier wordt beschreven, was sterk door de bovengenoemde problematiek geïnspireerd.

Deze beschrijving is voornamelijk gebaseerd op de publicaties van de hoofdrolspelers en hun naaste medewerkers. Dat geeft een wat monolithische benadering, maar ik hoop toch dat de lezer hierdoor enig inzicht krijgt in de achtergrond van deze ontwikkelingen en de wijze waarop de ideeën tot stand kwamen. Deze monografie beschrijft de ontwikkeling van hun ideeën tot het moment dat Willem Baarda met emeritaat ging.

Nadat een eerste versie van de voorliggende tekst klaar was, heb ik die aan enkele vrienden en collega’s toegestuurd. Velen reageerden, een aantal van hen wil ik met name noemen, te weten: Sieb Dijkstra, Robert Kroon, Jan de Kruif en Roel Nicolai. Zij kwamen met waardevolle aanvullingen en verbeteringen van de tekst. Hiddo Velsink gaf daarenboven een aantal suggesties voor historisch interessante referenties. Roel Nicolai verzorgde de meeste illustraties en voerde de eindredactie.

Martien Molenaar, januari 2021

Inhoudsopgave

Voorwoord iv

Inhoudsopgave v

1. Inleiding 1

2. De landmeetkundige praktijk in de twintigste eeuw en de aanzet tot de Delftse School 3

2.1 Het basisnet van de Rijksdriehoeksmeting (RD-net) 3

2.2 De theodoliet 5

2.3 Lokale verdichting van puntenvelden 5

2.4 Onderzoeksvragen voor de Delftse School 7

3. Periode Tienstra 9

3.1 Een eerste opzet van een onderzoeksprogramma 9

3.2 Het streven naar cirkelvormige standaardellipsen 10

3.3 HTW '38 11

3.4 De kleinste-kwadratenmethode opnieuw bezien 12

3.4.2 Grondslagen van de waarnemingsrekening en de kleinste-kwadratenmethode (Tienstra 1948) 14

3.5 De vijf standaardvraagstukken en vereffening in fasen 16

3.5.1 An Extension of the Technique of the Methods of Least Squares to Correlated Observations (Tienstra 1947) 16

3.6 Enkele afrondende opmerkingen 19

3.6.1 Het gebruik van complexe getallen 19

3.6.2. De ontwikkeling van een theorie zonder goede rekenfaciliteiten 19

3.6.3. Weinig vermelding van bronliteratuur 20

4. Periode Baarda 21

4.1 Praktijkervaring als landmeter 21

4.2 De invloed van David van Dantzig 22

4.3 De HTW '56 25

4.4 De geboorte van de Π-grootheden. 26

4.4.1 Introductie van $\Delta\Lambda_{ik}$ berekend uit coördinaten (Baarda 1957) 26

4.4.2 Daar komen de Π–grootheden (Baarda 1962) 27

4.5 Kringnetten 29

4.6 De B-methode van toetsen 31

4.6.1 De introductie van het begrip "grenswaarde" (Baarda en Alberda 1962) 32

4.6.2 Data Snooping en de B-methode van toetsen (Baarda 1968) 34

4.6.3 De inwendige en uitwendige betrouwbaarheid van netwerken 36

4.6.4. Het toetsen van het functionele model 36

4.7 S-transformaties, criterium- en vervangingsmatrices 36
4.7.1 Schrankingsstelsels 36
4.7.2. Onderscheid tussen precisie en betrouwbaarheid 38
4.7.3. Schrankingstransformaties (S-transformaties) 38
4.7.4 Criteriummatrices 40
4.7.5 Vervangingsmatrices 44
4.8 Het Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek 45
4.8.1. Het begin 45
4.8.2. De ontwikkeling van rekenfaciliteiten aan de TH-Delft 45
4.8.3. De ontwikkeling van software 46
4.8.4 De berekening van landmeetkundige netwerken 47
4.8.5 De verkenning van landmeetkundige netwerken 47
4.9 Uitbreiding naar drie dimensies 48
4.9.1 Ruimtelijke S-stelsels en criteriummatrices 49
4.9.2 Ruimtelijke netwerken 50
4.9.3 Fotogrammetrie 51
5. Nabeschouwing 53
Annexen: 56
Annex 1: Standaardvraagstuk I 56
Annex 2: Standaardvraagstuk II, III, IV en V 57
Annex 3: De geometrische interpretatie van de standaard-vraagstukken 58
Annex 4: Standaardellipsen en foutenkrommen 59
Annex 5: De definitie van Π-grootheden 60
Annex 6: Data Snooping 62
Annex 7: Ricci Calculus 62
Annex 8: De inzet van quaternionen 65
Referenties: 67
Illustraties 70
Samenvatting Bijlage I: 71
Inhoud Bijlage I 71
Samenvatting Bijlage II 72
Inhoud Bijlage II 72

1. Inleiding

In de twintigste eeuw en vooral in de tweede helft, vonden bij de Afdeling Geodesie van de TU Delft ontwikkelingen plaats die nationaal en zeker ook internationaal veel aandacht trokken. Ze kregen geleidelijk aan een grote invloed op de geodetische en landmeetkundige praktijk. Deze ontwikkelingen betroffen de wijze waarop meetopzetten werden verkend, de meetresultaten werden verwerkt en vooral de wijze waarop de kwaliteit van de uitkomsten werd beoordeeld. In de geodetische wereld werd deze ontwikkeling aangeduid als de Delftse School. De belangrijke voortrekkers hiervan waren Jacob Menno Tienstra en zijn opvolger Willem Baarda en hun medewerkers. Hun actieve bijdrage aan dit veld liep van ca. 1930 tot 1980 en dat is ruwweg de periode die in dit overzicht zal worden behandeld.

Het boeiende van deze periode is dat problemen die zich voordeden in de praktijk van de landmeter en geodeet leidden tot een diepgaande theoretische analyse van de werkzaamheden. Uit die analyse kwamen nieuwe concepten voort die dan in de praktijk werden getoetst, hetgeen weer leidde tot verscherping van de theoretische modellen. Daarom zal een beschrijving van deze periode gebaseerd moeten zijn op de samenhang tussen de ontwikkeling van theorie en beroepspraktijk. Toch is gekozen voor een gesplitste benadering. Dit eerste deel van deze monografie behandelt vooral de theorievorming. De impact hiervan op de praktijk van de landmeter en op andere vakgebieden zal apart beschreven worden in een tweede deel.

In deze monografie onderscheiden we twee periodes, die elk om de hoofdrolspelers Tienstra en Baarda geconcentreerd zijn. Er is gekozen voor deze indeling omdat:

a) De periode Tienstra zich vooral richtte op de structurering van de methoden voor gegevensverwerking, de zgn. vijf standaardvraagstukken van de waarnemingsrekening. In die periode werd ook een eerste aanzet gegeven voor een beter theoretisch kader voor de kwaliteitsanalyse van meetresultaten.

b) De periode Baarda richt zich vooral op de verdere ontwikkeling van dat theoretische kader voor de kwaliteitsanalyse van geodetische metingen. Hierbij werd het idee van "gegevenskwaliteit" of "-nauwkeurigheid" verscherpt door uitsplitsing in de begrippen "precisie" en "betrouwbaarheid". Bovendien hanteerde Baarda nieuwe wiskundige concepten voor de analyse van de structuur en kwaliteit van meetnetwerken.

De opkomst vanaf de tachtiger jaren van de vorige eeuw van eerst de zogenaamde "total stations" (combinatie van hoekmeting en elektronische afstandsmeting in één instrument) en later GPS en de zich steeds versnellende ontwikkeling van de ICT hebben de dagelijkse praktijk van de geodeet fundamenteel veranderd. De latere opkomst van laserhoogtemeting, radarinterferometrie en vele andere nieuwe meettechnieken hebben er mede toe bijgedragen dat de werkmethoden van de geodeet snel nog verder veranderden. Daarnaast hebben het opheffen van de faculteit Geodesie aan de TU Delft en de Geodesie-opleiding aan de Hogeschool van Utrecht de toevoer van hoger opgeleide geodeten in het Nederlandse beroepsveld beëindigd. Geodetische taken worden daardoor steeds vaker uitgevoerd door professionals uit andere disciplines, die niet opgevoed zijn in de ideeënwereld van de Delftse School. Daardoor dreigt dit gedachtengoed in de vergetelheid te raken. Dit zijn belangrijke redenen om deze monografie samen te stellen. De hoop is dat men zich toch bewust blijft van wat er in deze fase van de Nederlandse geodetische geschiedenis tot stand is gebracht. Het was een bijdrage aan de geodesie van wereldformaat.

De belangrijkste ontwikkelingsfase van de ideeën van de Delftse School viel voor deze ingrijpende technologische veranderingen in de geodesie. Om die goed te kunnen begrijpen

volgt na deze inleiding een korte beschrijving van de landmeetkundige praktijk van voor de tachtiger jaren. De tijd van na die omslag kan wellicht in een latere studie worden beschreven.

Er zijn door de jaren heen al veel artikelen verschenen over verschillende aspecten van de theoretische ontwikkelingen van de Delftse school, zeker ook van de hoofdrolspelers zelf. Daar zal in deze tekst gebruik van worden gemaakt. Dat wil zeggen dat een selectie wordt samengesteld van publicaties. Deze publicaties geven gezamenlijk een goed overzicht van de beschreven periode. Ze worden als bijlagen toegevoegd. Deze monografie geeft daarbij een kader waarin deze artikelen kunnen worden gelezen.

In het professionele veld wordt onderscheid gemaakt tussen de geodesie en de landmeetkunde. De ontwikkelingen van de Delftse School waren voor beide van evenveel belang. Daarom zullen in de volgende hoofdstukken deze begrippen door elkaar worden gebruikt. Het noemen van één van de twee zal telkens ook de andere insluiten.

2. De landmeetkundige praktijk in de twintigste eeuw en de aanzet tot de Delftse School

Omdat de ideeën van de Delftse School vooral vanuit ervaringen van de landmeetkundige praktijk voortkwamen, wordt in de volgende tekst een aantal basisbegrippen daaruit toegelicht. De ideeën zijn in een later stadium ook in de fotogrammetrie toegepast, maar het is de bedoeling daar later apart aandacht aan te besteden. We zullen slechts een korte schets geven. Voor verdere details wordt verwezen naar leerboeken die toen beschikbaar waren (Schermerhorn en Van Steenis 1964), (Alberda 1983), (HTW '56).

2.1 Het basisnet van de Rijksdriehoeksmeting (RD-net)

Nederland wordt bedekt door een driehoeksnet dat in de negentiende en twintigste eeuw is opgebouwd, zie *Fig. 1*. De driehoeken hebben zijdes van zo'n 20 tot 30 km. De theodoliet was in die tijd nog het belangrijkste nauwkeurige meetinstrument in de landmeetkunde. Daarom vormde de driehoeksmeting de basisconfiguratie voor de zogenaamde hogere-orde metingen, d.w.z. de metingen van een voor die tijd zeer hoge nauwkeurigheid.

Fig. 1: RD net, eerste orde net 1888 -1904, zie ook Fig. 13.

De coördinaten van de hoekpunten van de driehoeken werden berekend in een nationaal stelsel, waarvan de positieve Y-as naar het noorden wijst en de positieve X-as naar het oosten. Deze conventie werd ook in vele andere landen gevolgd, maar niet overal. Veel landen volgden een alternatieve conventie zoals in *Fig. 2* aangegeven.

De oorsprong (0, 0) was eerst de stang van de weerhaan op de spits van de Onze Lieve Vrouwentoren van Amersfoort. Later heeft men besloten de oorsprong zo te verschuiven dat alle coördinaten binnen het Nederlandse gebied positieve waarden hebben en dat overal binnen Nederland geldt dat Y > X.

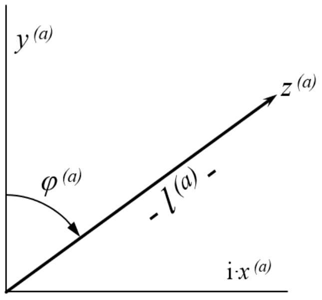
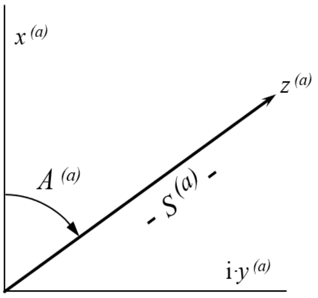
Nederlandse conventie	Alternatieve conventie
 $z^{(a)} = y^{(a)} + \mathrm{i}\cdot x^{(a)}$ $\varphi^{(a)}$ $l^{(a)}$	 $z^{(a)} = x^{(a)} + \mathrm{i}\cdot y^{(a)}$ $A^{(a)}$ $S^{(a)}$
$r_{jk} \equiv \varphi_{jk}^{(j)}$ $s_{jk} \equiv l_{jk}^{(j)}$	$r_{jk} \equiv A_{jk}^{(j)}$ $d_{jk} \equiv S_{jk}^{(j)}$

Fig. 2: Definitie (X, Y) coördinaten

De lengtes van de zijdes in dit RD-net werden berekend vanuit een paar lengtebases die met grote precisie werden gemeten, zie *Fig. 3*. Van de korte zijde *b* werd met hoge nauwkeurigheid de lengte gemeten en via een lokale driehoeksmeting kon dan de lengte van de zijde $DP_k - DP_{k+1}$ berekend worden, dit is een zijde van het RD-net.

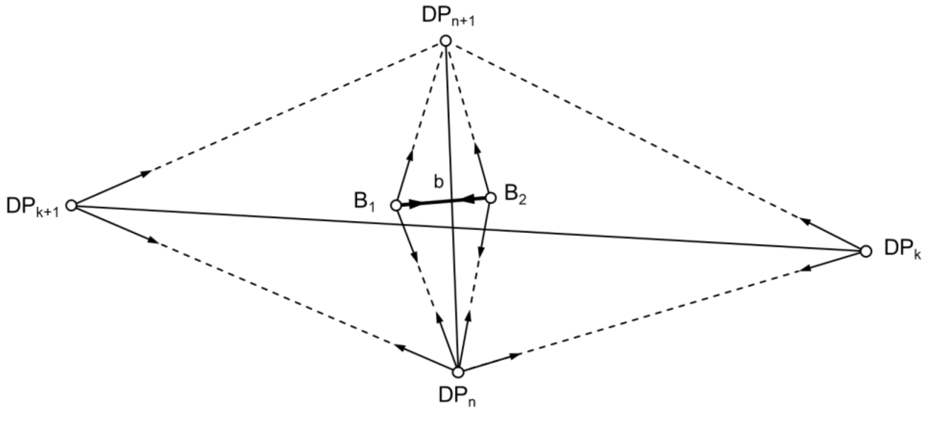


Fig. 3: Meting van een lengtebasis

Het driehoeksnet in *Fig. 1* vormde het eerste-orde net van de Rijksdriehoeksmeting (RD). Dit werd in verschillende stappen verdicht met tweede en derde orde metingen van netten met kortere zijden. Daarmee ontstond een relatief dicht veld van gegeven punten, waarop kon worden aangesloten voor lokale metingen.

2.2 De theodoliet

Vanwege de rol van de theodoliet is het van belang om de basisconstructie ervan te begrijpen. Dat geeft een goed inzicht in de aard van de hoekmetingen. De hoofdconstructie van een theodoliet bestaat uit een richtkijker, of vizier, die om een verticale as en een horizontale as kan draaien. *Fig. 4* links geeft een schets van een Wild T2 theodoliet, waarin de basisstructuur goed te herkennen is. *Fig. 4* rechts is een schematische weergave van de basisconstructie. De theodoliet wordt bij een opstelpunt zo opgezet dat de verticale as in de richting van de zwaartekracht ter plaatse staat. Als de kijker achtereenvolgens op twee verschillende richtpunten wordt gericht, dan kunnen de richtingen naar die punten op een rand in een vlak loodrecht op de verticale as (de horizontale rand) afgelezen worden. Het verschil van die twee richtingen geeft de hoek tussen die twee richtingen in het horizontale vlak. Ook kan naar ieder punt de verticale richting afgelezen worden op een rand loodrecht op de horizontale as (de verticale rand). Deze aflezing geeft de zenithoek van de zijde van opstelpunt naar richtpunt. Hieruit kan ook de elevatie worden afgeleid, de hoek die de zijde maakt met het horizontale vlak.

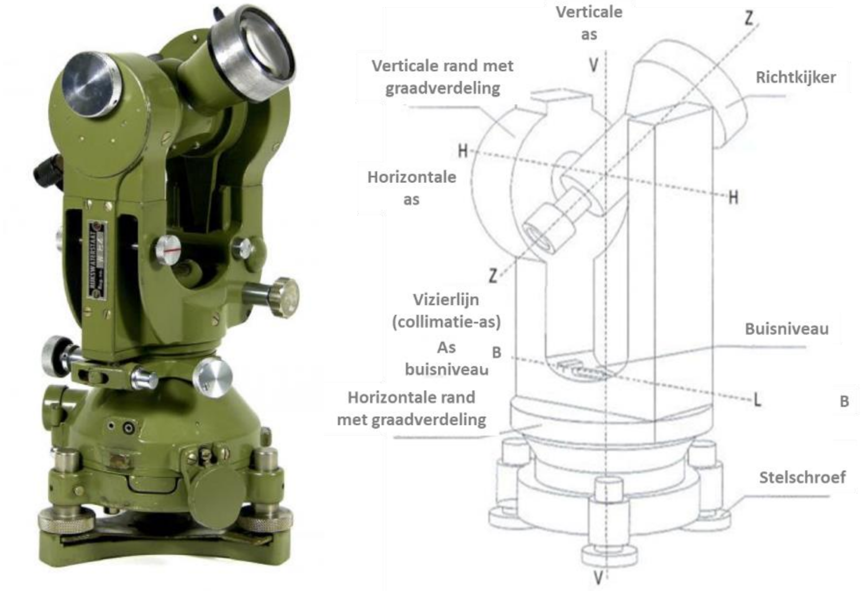


Fig. 4: Wild T2 theodoliet (links) en schema van een theodoliet (rechts)

De randen van de theodolieten die in Nederland en vele andere landen werden gebruikt waren doorgaans niet verdeeld in 360° maar in 400 decimale graden, aangeduid als “gr”. Een rechte hoek mat daarbij dus 100 gr. Iedere graad was onderverdeeld zodat aflezing met een precisie van 10^{-4} gr = 1 dmgr (decimilligraad) gebeurde. Een decimale graad wordt “gon” genoemd. Hiermee werd een decimaal stelsel voor hoekmeting gerealiseerd. Deze benadering was overigens niet universeel, vooral Angelsaksische (georiënteerde) landen werken met 360°.

2.3 Lokale verdichting van puntenvelden

Voor de aansluiting van lokale metingen op de hogere orde puntenvelden, lagen de gegeven punten vaak nog te ver uit elkaar. Daarom moesten aanvullende metingen deze puntenvelden verder verdichten. Hiervoor werd een aantal meetconfiguraties gebruikt.

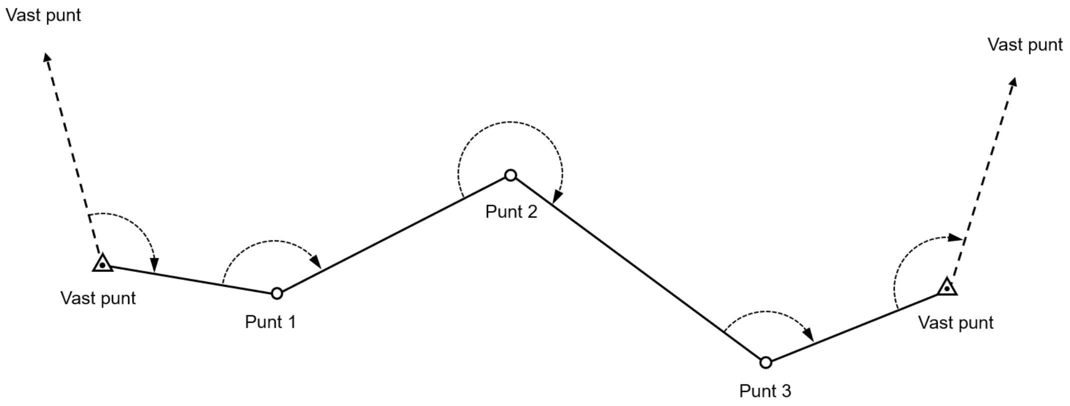


Fig. 5: Meting van een veelhoek

De eerste was de *veelhoekmeting*, zie *Fig. 5*. Hierbij werd tussen twee in coördinaten bekende punten een keten van nieuwe punten gelegd. Met een theodoliet, opgesteld in het eerste bekende punt, werd de hoek gemeten tussen de richting naar een ander bekend punt en het eerste onbekende punt. Vervolgens werd de theodoliet op ieder nieuw punt opgesteld en de hoek gemeten tussen de richtingen naar het voorliggende en het achterliggende punt. De meting werd afgesloten op het tweede bekende punt met een richting naar een ander bekend punt. Bovendien werden de lengtes gemeten van alle opeenvolgende zijdes tussen de bekende en nieuwe opstelpunten van de theodoliet.

De meettechniek was dus gebaseerd op het meten van hoeken en afstanden. Vooral het meten van afstanden had bij lagere orde metingen een beperkte nauwkeurigheid. Het gebeurde toen nog met meetbanden, optische afstandsmeters, of met een basisbaak zoals in *Fig. 6*.

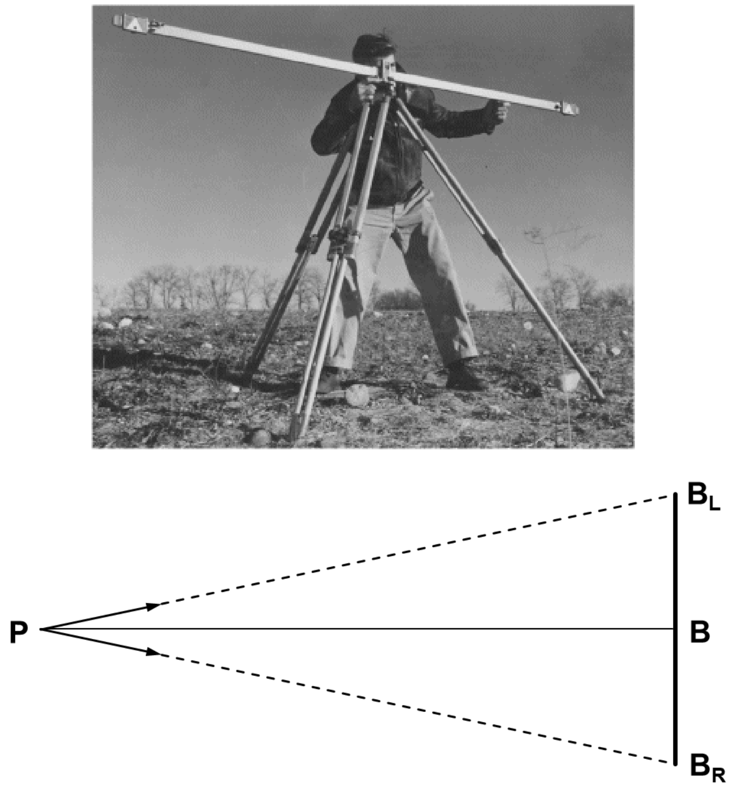


Fig. 6: Boven: basis-afstandsbaak; onder: lengtemeting met een basisbaak

Dit laatste ging als volgt: B_L-B_R is een vaste baak met een nauwkeurig bepaalde lengte, meestal 2 meter. Deze wordt zo opgesteld dat de lijn tussen het midden van de baak B en het punt P de middelloodlijn van deze baak vormt. Door het meten van de tophoek in P van de aldus ontstane driehoek kan de lengte van de zijde PB berekend worden.

Mocht er geen geschikt bekend punt beschikbaar zijn voor het begin en/of eindpunt van een veelhoek, dan waren er de volgende oplossingen:

1. Men ging uit van een basis met als eindpunten twee onderling zichtbare bekende punten en creëerde een driehoek met het nieuwe punt als top. Door het meten van de twee basishoeken konden de coördinaten van het nieuwe punt berekend worden. Dit werd een *voorwaartse insnijding* genoemd
2. De theodoliet werd op een nieuw punt opgesteld en men mat de richtingen naar drie of meer bekende punten die goed over de horizon verspreid lagen. Ook uit deze meting konden de nieuwe coördinaten bepaald worden. Dit noemde men de *achterwaartse insnijding* of *snelliuspunt*, zie *Fig. 7*.

Uiteindelijk leverden deze verdichtingsmetingen een puntenveld, bekend in coördinaten, dat dicht genoeg was om op aan te sluiten bij metingen waarmee de lokale topografie kon worden vastgelegd.

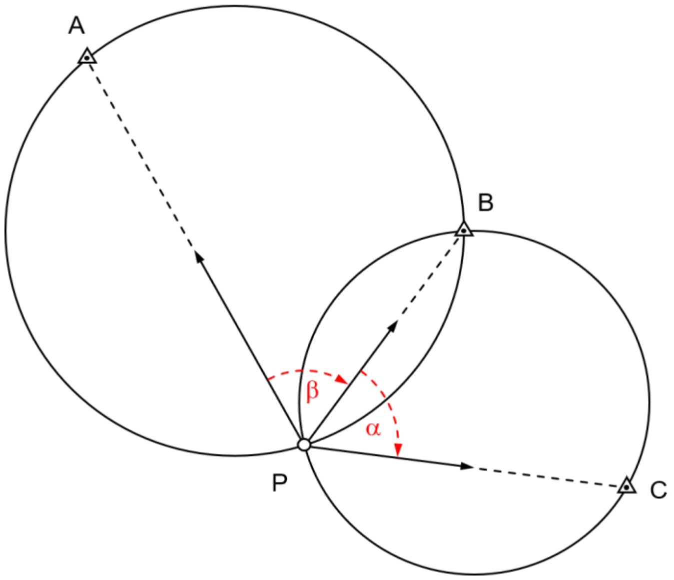


Fig. 7: Snelliuspunt: achterwaartse insnijding

2.4 Onderzoeksvragen voor de Delftse School

Omdat bij het meten fouten konden worden gemaakt, werden er meer metingen, de zogenoemde overtallige waarnemingen, verricht dan strikt noodzakelijk was om de coördinaten van alle punten te berekenen. Daarmee konden controles worden uitgevoerd. Hieruit bleek dat er kleine tegenspraken optraden zonder dat er echte meetfouten waren gemaakt. Dit leidde in de achttiende eeuw al tot het inzicht dat metingen een stochastisch karakter hadden en zich dus gedroegen als statistische grootheden, die bij herhaalde meting een zekere spreiding van waarden vertoonden. Op basis van dit inzicht was het nu niet meer voldoende om na een meting alleen de coördinaten van nieuw bepaalde punten te berekenen: men moest voor de berekening van de coördinaten eerst kleine tegenspraken ten gevolge van

het stochastische karakter van de waarnemingen wegwerken. Verder was het belangrijk om ook inzicht te gegeven in de kwaliteit of nauwkeurigheid van deze coördinaten.

Uit deze inzichten ontstond het onderzoeksprogramma van de Delftse School, waarin de volgende vragen aan de orde kwamen:

1. Hoe werk je de tegenspraken, die als gevolg van het stochastische karakter van de meetresultaten optreden, op een verantwoorde wijze weg?
2. Hoe werkt het stochastische karakter van de metingen door op de berekende coördinaten?
3. Hoe kun je voorkomen dat er niet-stochastische afwijkingen in de meetresultaten (meetfouten) optreden?
4. Hoe kun je schatten welke orde van grootte van meetfouten eventueel onontdekt blijven en hoe zouden die doorwerken in de berekende coördinaten?
5. Hoe kun je een meetopzet ontwerpen zodat de effecten van 2, 3 en 4 binnen aanvaardbare grenzen blijven?

In de periode Tienstra is vooral gewerkt aan de eerste twee vragen. Hierbij bouwde hij voort op de ontwikkelingen van de mathematische statistiek in de negentiende eeuw. De *Methode der Kleinste Kwadraten* was in die eeuw uitgewerkt, mede op basis van ervaringen bij geodetische en astronomische metingen. Hierbij waren bekende wiskundigen betrokken, zoals Legendre, Gauss en Laplace. Zie o.a. (Stigler 1986) (Teunissen 2000).

Deze periode vond haar afronding in 1956, na het overlijden van Tienstra. In dat jaar verscheen postuum zijn boek (Tienstra 1956). Hierin wordt een schematisch overzicht gegeven van vijf standaardmethodes, de zogenaamde vijf standaardvraagstukken, om metingen met overtallige waarnemingen te verwerken. Dit boek gaat ook al in op de vraag hoe onzekerheid in de waarnemingen doorwerkt in de berekende coördinaten. Die inzichten worden gebruikt bij het opstellen van de in datzelfde jaar verschenen nieuwe uitgave van de *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster"* (HTW '56). Deze handleiding was de opvolger van de handleiding uit 1938 (HTW '38) voor de landmeters van het Kadaster en de overige praktijk. De HTW bevatte richtlijnen voor het verkennen, meten en berekenen van landmeetkundige constructies.

Na het overlijden van Tienstra nam Baarda de fakkel over. Hij zou zich vooral richten op de vragen 3 tot en met 5. Zo rond het begin van de jaren 1980 was er vanuit deze vragen een mooi afgeronde theorie ontwikkeld op basis waarvan vernieuwde richtlijnen werden geformuleerd voor de praktijk van de landmeter. De opkomst van de elektronische afstandsmeting in combinatie met hoekmeting maakte toen ook nieuwe structuren voor meetnetwerken mogelijk. Dit samen met de zich snel ontwikkelende ICT gaf goede mogelijkheden voor een beter inzicht in de theorie en haar toepassing in de praktijk.

Bij het afscheid van Baarda in 1982, hij ging toen met emeritaat, kreeg hij een bundel aangeboden met de titel "*Daar heb ik veertig jaar over nagedacht*"(LGR 1982). Deze bundel bevat artikelen van collega's, studenten en vrienden als eerbetoon voor de bijdrage die Baarda aan de geodesie in Nederland, maar ook wereldwijd had geleverd.

3. Periode Tienstra

3.1 Een eerste opzet van een onderzoeksprogramma

Op 26 oktober 1931 aanvaardde Jacob Menno Tienstra het ambt van Lector aan de Landmeterscursus van de toenmalige Landbouwhogeschool te Wageningen, nu de Wageningen University & Research. De titel van de voordracht luidde ”*Het gebruik van de methode der kleinste kwadraten in de landmeetkunde*”. De kleinste-kwadratenmethode was in de negentiende eeuw ontwikkeld door een aantal kopstukken uit de wiskunde in met name Frankrijk en Duitsland. Deze geschiedenis is uitputtend en boeiend beschreven in (Stigler 1986). Het boek laat zien hoe de astronomie, maar vooral ook de geodesie, een stimulerende rol had bij de ontwikkeling van deze methode. Een kortere overzichtelijke verhandeling wordt gegeven in (Teunissen 2000).

Zoals in hoofdstuk 2 beschreven is, werden in de landmeetkunde en de geodesie altijd meer waarnemingen gedaan dan strikt nodig waren voor het berekenen van de positie van nieuwe punten. Men beschikte dus over “overtallige” waarnemingen om te controleren of er meetfouten waren gemaakt. Door het stochastische karakter van de waarnemingen traden er variaties in de meetresultaten op, waardoor er altijd tegenspraken gevonden werden in de berekende resultaten, ook als er geen echte meetfouten waren gemaakt. De kleinste-kwadratenmethode werd nu vooral in wetenschappelijke kringen gezien als de zuiverste methode om deze tegenspraken weg te werken.

Maar in de praktijk was ze nog lang niet gangbaar. De rekenkundige processen voor het oplossen van grote stelsels met lineaire vergelijkingen waren te ingewikkeld en tijdrovend. De tijd van de computer was nog lang niet aangebroken. Berekeningen werden met de hand uitgevoerd, met behulp van logaritmetafels en handrekenmachines of elektrische machines, zoals respectievelijk de Brunsviga of Friden machines. Daarom werden ad-hocmethodes bedacht om de berekeningen uit te voeren en om tegenspraken in de gegevens te verwerken.

In zijn rede liet Tienstra zien dat deze praktische oplossingen tot problemen leidden, omdat meetfouten en stochastische variaties in de waarnemingen niet goed gecorrigeerd werden. Dat werd duidelijk wanneer metingen in verschillende fasen werden verricht voor de stapsgewijze uitbreiding en verdichting van landmeetkundige puntenvelden. Onverwerkte fouten en tegenspraken in vroegere metingen leidden dan tot vervormingen die problemen gaven als men nieuwe metingen wilde aansluiten op de vroegere. Hij gaf ook aan dat het van belang was om een indicatie te geven van de kwaliteit van de berekende coördinaten, om daarmee te beoordelen of de gegeven punten goed genoeg waren om er met nieuwe metingen op aan te sluiten.

Tienstra gebruikte een metafoor waarin een groep mensen een onbewoond eiland gaan bevolken. Hij legde uit hoe dat eiland in kaart werd gebracht. Een landmeter gaat aan de slag en legt eerst een dekkend driehoeksnet, dat vervolgens wordt verdicht met fijnmaziger netten. Dan volgt verdere verdichting met veelhoeken en snelliuspunten en vervolgens volgt de detailopname van de topografie.

Dit voorbeeld toonde zo de verschillende fasen van het werk in de landmeetkundige praktijk. In het verdere betoog liet hij dit voorbeeld los en ging hij in op de bovengenoemde problematiek. Daarna volgde een pleidooi voor de inzet van de kleinste-kwadratenmethodiek. Daarbij behandelde hij een aantal onderwerpen:

– De verwerking van meetresultaten – of dat nu oplossingen ad hoc waren of een toepassing van de kleinste-kwadratenmethode – was gericht op het berekenen van coordinaten. Er werd doorgaans geen informatie geleverd over de kwaliteit van deze

coördinaten en dat zou wel moeten. Tienstra pleitte ervoor om de standaardellipsen (of foutenkrommen) van de coördinaten ook te berekenen (zie annex 4).

– Doordat het werk van de landmeter of geodeet in verschillende fasen opgedeeld werd, was het zinvol om ook de kleinste-kwadratenmethode zo toe te passen dat die deze fasen volgt. De resultaten van een eerdere fase kunnen dan als invoer in een volgende fase worden gebruikt, zonder dat men de bewerking van de eerdere fasen weer opnieuw moet uitvoeren.

– Tienstra pleitte er ook voor om metingen zo in te richten, dat de meetresultaten uiteindelijk tot cirkelvormige standaardellipsen voor de berekende coördinaten leiden (zie annex 4). Hierdoor is de nauwkeurigheid niet gevoelig voor de richting waaruit men een punt aanmeet. Dit stelt eisen aan de uitvoering van de meting. Hij beschouwde hier vooral de meting van driehoeksnetten en daarbij is dan zowel de nauwkeurigheid van de hoekmeting van belang als de geometrie van het driehoeksnet. We gaan in de volgende paragraaf hierop in.

3.2 Het streven naar cirkelvormige standaardellipsen

In zijn openbare les gaf Tienstra aan dat hij een manier had gevonden om puntenvelden met cirkelvormige standaardellipsen (in feite heeft hij het over de daarvan afgeleide foutenkrommen "error-curves") te genereren. Hij zag dit, zoals in zijn tijd gebruikelijk in de geodetische praktijk, als een ideale situatie. In 1933 volgde een publicatie bij de Koninklijke Academie van Wetenschappen (KNAW), waarin hij zijn benadering toelichtte (Tienstra 1933).

In de inleiding stelde hij:

> *When by measurement the position of a point in a plane has been determined, the accuracy of this determination is represented by the error-curve of the point according to the theory of the least squares. This curve is a foot-point curve of an ellipse. The determined point is the center of this curve. In particular cases the error-curve is a circle. The point is then determined with the same accuracy in all directions. Generally it will deserve recommendation to require equal accuracy in all directions when determining a point. This will e.g. be the case with an angle point of a net of triangles.*

En verder dat hij zal bewijzen dat:

> *.....if the angles of a net of triangles without obtuse angles are measured with weights which are per triangle proportional to the cotangents of the angles, all the points of the net will have circular error-curves.*

Via nogal wat heftige wiskundige afleidingen wordt het bewijs geleverd. Dus inderdaad als de gewichten (zie annex 1) van de gemeten hoeken evenredig zijn aan de cotangenten van die hoeken, dan zijn de standaardellipsen cirkels. Tienstra liet eerst zien dat dit geldt bij de coördinatenberekening in een vrij netwerk, dat is een netwerk dat niet is aangesloten op gegeven punten, dus een netwerk met een eigen coördinatenstesel. Daarna liet hij zien dat de resultaten behouden blijven onder een gelijkvormigheidstransformatie, dus als de coördinaten omgezet worden naar een willekeurig ander stelsel. Wiskundig klopt dat, maar er zijn wel wat opmerkingen over te maken:

1. De eis wordt gesteld aan de gewichten van de hoeken. Als de meting zo wordt opgezet dat de gemeten hoeken niet gecorreleerd zijn, betekent dat dat de gewichtscoëfficiënt (in dat geval de inverse van het gewicht) en dus de variantie van iedere hoek evenredig is met de tangens van die hoek. De waarde van de tangens wordt echter oneindig bij 100 gr (90°) en negatief bij een hoek groter dan 100 gr. Dat kan niet

voor een variantie, die moet altijd positief zijn. Tienstra stelt wel dat het driehoeksnet geen stompe hoeken mag bevatten, maar het gaat erom dat hier een variantiefunctie wordt gebruikt die in principe ontoelaatbaar is.

2. Deze benadering stelt alleen eisen aan de vorm van standaardellipsen per punt. Er wordt niet gekeken naar de kwaliteit van het hele puntenveld zoals die later in de vorm van een volledige covariantiematrix zal worden beschreven. Het gevolg is dan ook dat later zal blijken dat deze vorm van netwerkoptimalisatie niet goed werkt. De eis om standaardcirkels na te streven, met een van tevoren gespecificeerde straal, zal te streng blijken. Er kan niet aan voldaan worden.
3. De vorige twee punten waren principieel van aard. Er waren echter ook praktische bezwaren tegen de geformuleerde eis aan te voeren. Die waren gelegen in het feit dat de landmeter bij voorkeur per standplaats meerdere series richtingen naar de andere punten mat. Het meten van individuele hoeken werd als onpraktisch en inefficiënt beschouwd. Dit bezwaar werd nog versterkt door het feit dat de hoeken met verschillende precisie moesten worden gemeten, afhankelijk van de waarde van de tangens of cotangens. Dit laatste is sowieso niet doenlijk.

Afgezien van deze opmerkingen geeft deze studie van Tienstra wel aan dat er gezocht wordt naar criteria waar de kwaliteit van geodetische metingen aan moet voldoen. Hier richt de aandacht zich vooral op de precisie van punten, zoals die wordt uitgedrukt door de standaardellipsen. Het achterliggende idee is dat men optimale geodetische netwerken krijgt als ze zodanig gemeten worden dat men uiteindelijk punten met cirkelvormige standaardellipsen genereert. Dit idee zal nog bij velen doorleven tot ver in de jaren ’80.

Zoals hieronder blijkt in paragraaf 3.3 zou men in de traditie van de Delftse School de eis om te streven naar optimale netwerken laten vallen, omdat die als te stringent werd beschouwd. De landmeter moest de ruimte hebben om de structuur van de te meten netwerken aan te passen aan de terreinsituatie. Bovendien gold het bezwaar ad 3 hierboven. Ervaring wees uit dat vaste meetprocedures tot goede resultaten leidden. De landmeter moest routinematig kunnen werken en dat liet de voorgestelde methodiek niet toe. Daarom vond men het beter om te streven naar een precisie die niet minder mocht zijn dan een bepaalde ondergrens. Dus metingen moesten voldoende goed zijn. Vanuit deze formulering zou van nu af aan het zoeken naar een criteriumtheorie voor de precisie van metingen voortgezet worden. Dit zoeken zou begin jaren ‘70 tot een benadering leiden die bruikbaar leek.

3.3 HTW ‘38

In 1932 werd Tienstra, samen met de ingenieur verificateur Th. L. Kwisthout en de landmeter P. J. Hamelberg, gevraagd om te werken aan de opzet van een handleiding voor de technische werkzaamheden voor de landmeters van het Kadaster. Die verscheen in 1938 en wordt kort aangeduid als de HTW ’38.

Deze handleiding gaf een korte beschrijving van de opbouw van het coördinatenstelsel van de Rijksdriehoeksmeting, het RD-net. Daarna volgde een uitleg van de meetconfiguraties die werden gebruikt om dit netwerk in verschillende opeenvolgende fases te verdichten, om tenslotte tot het niveau te komen waarin de puntenvelden voldoende verdicht waren om op te kunnen aansluiten voor het inmeten van de lokale topografie. Naast de meetopzet werd aandacht gegeven aan de rekenmethodes voor het verwerken van de meetresultaten en het berekenen van de coördinaten van de aangemeten punten. Hierbij werd vooral aandacht besteed aan de vereffening van tegenspraken (sluitfouten) ten gevolge van het stochastische karakter van de waarnemingen.

Bovendien werd uitgelegd hoe de nauwkeurigheid (standaardafwijkingen, varianties) van de metingen doorwerkt op de berekende coördinaten, via de zogenaamde voortplantingswetten en hoe men daaruit dan standaardellipsen afleidt voor de nieuw berekende punten. De verkenningseisen werden nu minder streng geformuleerd dan in (Tienstra 1933). Dit om redenen die al in paragraaf 3.2 hierboven werden geformuleerd. Of zoals gesteld in (Baarda 2002):

> *Toekenning van een gewicht aan een hoekmeting evenredig met de cotangens van de hoek bleek cirkelvormige standaardellipsen van de coördinaten van alle hoekpunten te genereren (de standaardellips het 'beeld' van de covariantiematrix van de twee puntcoördinaten, loodrechte projectie van een standaardellips op een bepaalde richting geeft tweemaal de standaardafwijking – de wortel uit de variantie – in deze richting). Cirkelvormige standaardellipsen waren de ideale situatie in de geodetische wereld. Maar efficiënte en betrouwbare meting verhindert een hoekmeting met verschillende gewichten. Oplossing geeft een zodanige keuze van netpunten dat alle hoeken ongeveer 60 graden zijn. Analoge beschouwingen gelden voor enkelpuntsbepaling en veelhoeksmeting. Dit patroon van metingen – de zogenaamde meetkundige grondslag – in een op te meten regio moet dus in het terrein voorverkend worden om aan de doelstellingen te kunnen voldoen. Als voorman in een driehoofdige redactiecommissie heeft Tienstra dit alles op een voor die tijd unieke wijze voorgegeven in de 'Handleiding Technische Werkzaamheden van het Kadaster (HTW)', 1938. Als doelstelling werd geformuleerd dat van alle in te meten punten de standaardellips binnen een cirkel met straal d cm diende te liggen. Voor punten van de Rijksdriehoeksmeting en punten in grote steden werd d = 3 gesteld, voor punten in kleinere steden en landelijk gebied met redelijk dichte bebouwing d = 6, voor gebieden met grenzen aangegeven door sloten of heggen d = 12 (speciaal met het oog op luchtkartering).*

Dus nauwkeurigheidseisen werden niet langer gesteld in de vorm van een na te streven ideale precisie voor punten. Ze werden nu als volgt geformuleerd (HTW '38, blz. 89):

> *....de wortel uit het gemiddelde van het kwadraat van de lange as van de foutenellipsen bij de bepaling van een niet te gering aantal punten verkregen, moet zijn in…*

en daarna volgden specificaties voor drie terreintypen. Deze eisen luidden overigens iets anders dan Baarda in het citaat hierboven stelde.

Hoewel de verkenningseisen nu wel soepeler waren dan in (Tienstra 1933) bleef nog wel de beperking dat men alleen puntstandaardellipsen in beschouwing nam. Er werd nog niet naar covarianties tussen punten gekeken, waaruit relatieve standaardellipsen kunnen worden berekend, zoals we later zullen zien. (Zie annex 4.)

3.4 De kleinste-kwadratenmethode opnieuw bezien

3.4.1 Vragen over de kleinste-kwadratenmethode

In 1935 maakte Tienstra de overstap naar de TH in Delft. Daar werd hij eerst benoemd als buitengewoon hoogleraar, in 1939 volgde de benoeming tot gewoon hoogleraar. In zijn inaugurale rede legt hij zijn worsteling uit met de grondslagen van de methodiek van de kleinste kwadraten. In het begin van de twintigste eeuw tot vlak na de Tweede Wereldoorlog, werd veel nagedacht over de nog niet goed begrepen relatie tussen wiskundig geformuleerde natuurwetten en het stochastische karakter van metingen. In breder verband ging het over de betekenis van wiskundige modellen in relatie tot metingen die variabele uitkomsten geven. In Nederland worden in dit verband namen als Mannoury en Van Dantzig genoemd (zie ook hoofdstuk 4.2 en bijlagen Ib en Ic).

Tienstra had contact met deze groep en was door hun denkbeelden beïnvloed. Zijn ervaring was dat de toepassing van de kleinste-kwadratenmethode tot goede resultaten leidde, terwijl in het denken van die tijd de grondslagen nog twijfelachtig werden gevonden. Zijn beschouwingen betreffen twee belangrijke aspecten van het gangbare denken over de relatie tussen meten en wetenschappelijke modellen:

1. Fysische fenomenen worden beschreven door middel van karakteristieke grootheden, waartussen relaties bestaan die in een wiskundig model worden vastgelegd. Metingen zijn erop gericht om waarden voor die grootheden te krijgen en daarmee het model te kwantificeren.
2. Metingen zijn dus gericht op het vinden van de waarden van die grootheden, maar door hun stochastisch karakter treden er variaties in de meetresultaten op waardoor men nooit eenduidige waarden voor die grootheden definitief kan vaststellen.

Ad 2 geeft hij aan dat het verantwoorden van de methode der kleinste kwadraten vanuit de grondslagen van de kanstheorie problematisch is. Men gaat er namelijk van uit dat metingen aan *de centrale limietstelling* voldoen. Dat houdt in dat herhaalde metingen een spreiding van resultaten geven, maar dat, als het aantal herhalingen zeer groot is, deze spreiding de normale verdeling benadert. Wiskundig neemt men aan dat voor een grootheid $\underline{x}$ als het aantal n van de waarnemingen x_i naar oneindig zou lopen de *normale verdeling* de limiet van de spreidingsfunctie (verdelingsfunctie) blijkt te zijn. Het gevolg daarvan is dat voor het gemiddelde X_n van de waarnemingen geldt:

$X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ met $E\{x\}=Lim_{n\rightarrow\infty} X_n = \mu_x$

Daarin is μ_x de *verwachtingswaarde* van de meetresultaten. De grootheid $\underline{x}$ wordt als stochastisch aangeduid. De verwachtingswaarden van de gemeten grootheden werden ook wel de *"ware waarden"* genoemd, dat zijn de waarden waarvoor een model ad 1 geldt. Het probleem is nu dat men bij echte metingen zelden of nooit zoveel waarnemingen doet, dat vastgesteld kan worden dat deze axioma's gelden. Dus als de geldigheid van deze axioma's voorwaarde is voor de toepasbaarheid van de kleinste-kwadratenmethode, heeft men een probleem. Maar het is ook de vraag of er wel meetprocessen gespecificeerd kunnen worden die zo stabiel zijn dat dergelijke grote hoeveelheden data verzameld kunnen worden.

Bovendien is een mathematisch model altijd een idealisatie van de fysische werkelijkheid die men wil beschrijven. Tienstra verduidelijkt dat aan de hand van een voorbeeld waarin de afstand tussen twee terreinpunten wordt gemeten. Laten we hier het voorbeeld nemen waarin het om de relatieve ligging van drie terreinpunten gaat. Dan zal men zich moeten realiseren dat deze punten idealisaties zijn van objecten in het terrein. Deze objecten worden in het model gerepresenteerd door punten zonder afmeting en daarbij is er altijd enige onzekerheid over de koppeling tussen terreinobject en mathematisch punt. Dit betekent dat dan ook niet scherp bepaald is om welke driehoek het nu precies gaat en daarmee is het problematisch om in wiskundige zin de hoeken tussen de drie punten te specificeren. Bij deze meting werkt men bovendien met een theodoliet met fysische kenmerken en met licht dat zich door de atmosfeer van punt naar punt voortplant, onderhevig aan de daarbij optredende refractie. Het is dus helemaal niet zeker dat, als de bedoelde hoeken al exact gespecificeerd konden worden, die dan ook echt gemeten worden. Men registreert iets dat erop lijkt.

Dus de koppeling tussen fysische fenomenen en wiskundige modellen kent inherente onzekerheden en daarenboven kent het meetproces haar eigen onzekerheden. Meetprocessen kunnen dus nooit definitieve ware waarden leveren. Men moet altijd werken met schattingen, zoals die volgen uit metingen en de toepassing van de kleinste-kwadratenmethode. En dat houdt in dat de geldigheid van modellen ad 1 nooit definitief kan worden vastgesteld;

het gaat altijd om schattingen. Ook al zijn die vaak zeer goed, men zal toch een methode moeten vinden om de betrouwbaarheid daarvan vast te stellen. Bovendien toonde de ervaring dat bij verbetering van meettechnieken nauwkeurigere resultaten vaak leidden tot aanpassing van de modellen.

In de periode na de tweede wereldoorlog onderzoekt Tienstra daarom de grondslagen van de in de geodesie gebruikelijke toepassing van de methode der kleinste kwadraten. Zijn inzet wordt mooi beschreven in (Baarda 2002, blz. 133–134). Het ging hem dus vooral om een fundamenteel inzicht in de reden waarom de methodiek verantwoord was en wat nu de feitelijke aard van de informatie was die hiermee verwerkt en inzichtelijk gemaakt werd. Naast de invloed van personen als Mannoury en Van Dantzig was Tienstra hierbij volgens Baarda ook sterk beïnvloed door de ideeën van Von Mises en met name door zijn boek "*Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*" uit 1936.

3.4.2 Grondslagen van de waarnemingsrekening en de kleinste-kwadraten-methode (Tienstra 1948)

Het artikel uit 1948 begint direct met een stevige kritiek op de gebruikelijke terminologie van die tijd:

> *In most classical textbooks on the calculus of observations in the first chapter we find a discussion on different kinds of errors: the true error, the systematic error and the accidental error. In connection with the true error, also a true value of an observation is introduced. Sometimes the true value is considered as a mysterious " super value ", that, may it not be measured by the imperfect methods of mankind, nevertheless must be considered to exist, sometimes it is defined as the limit to which tends the arithmetic mean of a number of observations when this number increases ad infinitum. It is clear that in both ways the conception is perfectly meaningless. Moreover it is in full contradiction with the theories in modern physics about the structure of matter. Therefore the true value and with it the true error has to be abandoned as belonging to a passed period of the history of science. ……… The theory can be built up simply, if we only begin with the beginning: the observations. The observations are a physical reality and in them is to be found the source of all our knowledge on measuring. It is nonsensical to introduce incontrollable highly mysterious and metaphysical conceptions on a domain of pure physics.*

Tienstra had bezwaren tegen het gebruik van de normale verdeling van Gauss en Laplace, omdat die staarten had die tot in het oneindige doorliepen. In echte meetprocessen kwamen zulke grote afwijkingen niet voor. Bovendien had hij, zoals boven beschreven, bezwaren tegen het gebruik van het begrip verwachtingswaarde. Ook het kansbegrip wilde hij vermijden als mathematisch begrip. Hij wilde deze, volgens hem hypothetische begrippen, vermijden en op een zuiver empirische basis zijn theorie ontwikkelen. Vermoedelijk kwam deze benadering voort uit zijn contacten met mensen als Mannoury en Van Dantzig. Dat waren representanten van een groep wetenschappers en filosofen die opnieuw greep probeerden te krijgen op de empirische grondslagen van de wetenschap in bredere zin (Alberts 2000a, b en c) en bijlage Ib.

Vanuit deze achtergrond werkte hij zijn ideeën uit. Voor twee onderling onafhankelijke grootheden x en y deed hij een zeer groot aantal waarnemingen en bouwde daar een tweedimensionaal histogram uit op. De waarden van x en y werden langs twee assen uitgezet. Hij registreerde het aantal waarnemingen voor iedere combinatie van (x, y)-waarden, de frequenties van het voorkomen van de waardencombinaties. Daarna liet hij zien dat de (x, y)-combinaties met dezelfde frequenties bij benadering een ellips vormen met de langste en kortste as evenwijdig aan de x- en y-as. Door over te gaan op andere lengte-eenheden

langs de x- en y-as kunnen de ellipsen omgevormd worden tot cirkels. Vervolgens werd uitgelegd hoe uit dit histogram frequentieverdelingen kunnen worden afgeleid voor lineaire functies van x en y.

Dit idee kan worden uitgebreid voor grotere aantallen grootheden x_i met $i = 1, \dots , n$ en lineaire functies van x_i . Hiervoor werden de voortplantingswetten voor gemiddelden, varianties en covarianties uitgelegd of in plaats daarvan de voortplantingswetten voor gewichtscoëfficiënten (zie annex 1), door Tienstra cofactoren genoemd. Hij introduceerde toen een n-dimensionale ruimte waarin een punt $\underline{x}$ geïdentificeerd werd met n waarden x_i , de waarnemingen als coördinaten. In die ruimte genereren de punten met gelijke frequentiewaarden hyperellipsen of hypersferen in plaats van ellipsen of cirkels.

Daarna volgde een uitleg van een kleinste-kwadratenvereffening volgens het eerste standaardvraagstuk, zie annex 1. En dit werd toegelicht met een geometrische interpretatie als in annex 3. De conclusie van het verhaal is dat de werking van de kleinste-kwadratenmethode kan worden uitgelegd zonder een beroep te doen op de normale verdelingsfunctie van Gauss-Laplace en zonder een beroep te doen op het formele kansbegrip. Hij formuleert dit als volgt:

> *To justify this we put for us once more the n-dimensional coordinate system ...... on which the representation of the n-dimensional frequency distribution of the observations had the property that points of equal frequency formed a system of concentric hyper spheres and also a same system on which we represent the [Y-ruimte] and the " observed point ", both systems being placed before us in a same orientation. We now apply a translation on one of the systems relative to the other one, so that the observed point is placed on the hyper sphere with the smallest radius and the center of the hyper spheres is in the [Y-ruimte]. Then this center is the " adjusted point " and as the observed point is now on the smallest hyper sphere, its relative frequency is a maximum.*

Kortweg: het punt met de gecorrigeerde waarnemingen als coördinaten $\underline{X}$ ligt in de Y-ruimte. Het oorspronkelijke punt $\underline{x}$ ligt nu op een hypersfeer met het punt $\underline{X}$ als middelpunt en een straal R. Alle punten die aan de voorwaardenvergelijkingen van de vereffening voldoen, moeten in de Y-ruimte liggen. Het blijkt nu dat van alle punten in de Y-ruimte het punt $\underline{X}$ de kleinste waarde voor R geeft. In wezen is dit resultaat eigenlijk het uitgangspunt van de vereffening, het zoeken van de kortste projectie van $\underline{x}$ op de Y-ruimte, zie annex 3.

Het bovenstaande is een wat omslachtige formulering, in wezen legt hij hier het principe uit van wat in de literatuur *maximum likelihood estimators* wordt genoemd. Maar waarschijnlijk was dat begrip toen nog niet bij hem bekend. De door Tienstra ontwikkelde gedachtegang komt uiteraard niet helemaal los van de in de leerboeken ontwikkelde benadering, omdat hij in plaats van de normale verdelingsfunctie van Gauss de hypothese invoert dat waarnemingen zich in het algemeen zullen gedragen volgens het model dat hij in zijn voorbeeld behandelt. Dat is dus toch een hypothetische inductiestap. Die leidt in de leerboeken tot invoering van een wiskundige verdelingsfunctie en het kansbegrip, hetgeen hij juist wil vermijden. Baarda zou hier later pragmatischer mee omgaan door de filosofie van in- en uitschakeling van wiskundige modellen te volgen.

Aan het eind van zijn betoog stelt Tienstra nog dat het functionele model (hij noemt dat het algebraïsche model), waarin de waarnemingen worden ingevoerd, moet worden getoetst. Op suggestie van Baarda geeft hij aan dat de functie $\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v}$ van de correcties op de waarnemingen de informatie voor deze toets bevat. Hij zal dat verder niet uitwerken, dat zal Baarda later doen.

3.5 De vijf standaardvraagstukken en vereffening in fasen

3.5.1 An Extension of the Technique of the Methods of Least Squares to Correlated Observations (Tienstra 1947)

In zijn publicatie van 1947 behandelde Tienstra eerst het feit dat toepassingen van de kleinste-kwadratenmethode meestal uitgaan van de invoer van ongecorreleerde waarnemingen. Hij toonde aan dat de methodiek eenvoudig algemener gemaakt kon worden, zodat men ook kon uitgaan van gecorreleerde grootheden. Dat was in die tijd een vernieuwend inzicht, zeker voor geodeten. Daarna formuleerde hij vier varianten voor de toepassing van de kleinste-kwadratenmethode. Deze varianten maken gebruik van deze generalisatie van de methodiek.

<u>Het gebruik van de Ricci Calculus</u>

Voor de formulering van deze varianten met hun oplossingen maakte hij gebruik van de Ricci Calculus, een complexe indexnotatie waarmee men optellingen en producten van meerdere typen variabelen definieerde in de stijl van:

$y^r = B^r{}_s x^s$

Zie de toelichting in annex 7, blz. 302-303 uit (Tienstra 1947). Deze notatie wordt toegepast in de tensorrekening. Geodeten hebben deze leren kennen via de differentiaalmeetkunde, een speciale toepassing van de tensorrekening die gebruikt wordt bij geometrische berekeningen over gekromde oppervlakken zoals de ellipsoïde. Deze schrijfwijze is goed bruikbaar voor formulesystemen waarin veel verschillende typen grootheden voorkomen, maar deze flexibiliteit gaat ten koste van de leesbaarheid van de ontwikkelde formules. Hierdoor waren Tienstra's theoretische ontwikkelingen voor velen moeilijk te doorgronden. Zie ook de opmerkingen hierover in (Alberda 2005). Waarschijnlijk koos Tienstra voor deze notatie omdat hij nog niet goed bekend was met de matrixrekening.

<u>Van ongecorreleerde waarnemingen naar gecorreleerde grootheden</u>

Met behulp van deze Ricci Calculus werden nu de voortplantingswetten opnieuw afgeleid voor verwachtingswaarden en varianties en covarianties van functies $\underline{y}$ van de oorspronkelijke waarnemingsgrootheden $\underline{x}$. Zie annex 7, blz. 304-305 uit (Tienstra 1947), zie ook annex 1. Vaak zijn de waarden van de varianties en covarianties niet precies bekend. Daarom wordt overgegaan op de zogenaamde gewichtscoëfficiënten, Tienstra noemt deze ook *cofactoren*, zie annex 1. Als je uitgaat van oorspronkelijke niet gecorreleerde grootheden $\underline{x}$, dan zal blijken dat in het algemeen afgeleide grootheden door de voortplantingswetten wel gecorreleerd zijn. Dus als voor alle x_i en x_j met $i \neq j$ geldt dat $g_{x_i x_j} = 0$, dan zal men voor twee functies y en z van $\underline{x}$ vinden dat $g_{yz} = g_{zy} \neq 0$.

De methode der kleinste kwadraten blijkt dus toepasbaar of de ingevoerde waarnemingen nu wel of niet gecorreleerd zijn. Als $\underline{v}$ de uiteindelijk te berekenen correcties aan de oorspronkelijke waarnemingen $\underline{x}$ zijn en men formuleert de kleinste-kwadrateneis als (zie annex 1):

$\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v}$ = minimaal!

Dan maakt het voor het oplossingsalgoritme niet uit of g_{xx}^{-1} en dus ook g_{xx} al of niet diagonaalmatrices zijn. Als het diagonaalmatrices zijn, zijn de grootheden $\underline{x}$ niet gecorreleerd, anders wel. Met deze opmerking heeft Tienstra de methode algemener toepasbaar gemaakt dan in de geodetische praktijk gebruikelijk was omdat men daar doorgaans uitging van ongecorreleerde waarnemingen. Bovendien ging men ook meestal uit van waarnemingen met gelijke gewichten. Alle waarnemingen zouden dan even nauwkeurig gemeten zijn.

Vijf standaardvraagstukken

Na deze inleidende beschouwingen werd in (Tienstra 1947) opnieuw gekeken naar de structuur van vereffeningsproblemen in de geodesie. Er werden vier basisstructuren herkend in deze publicatie, en daar werd later nog een vijfde aan toegevoegd. In annexen 1 en 2 wordt een overzicht van deze "vijf standaardvraagstukken" gegeven. Hier wordt de schrijfwijze van die annexen gevolgd.

De eerste vorm, *Standaardvraagstuk I*, ging uit van het feit dat in de meetopzet overtallige waarnemingen werden meegenomen als controlemetingen. Hiermee werden *voorwaardenvergelijkingen* geformuleerd zoals: de som van de hoeken van een driehoek is 200 gr (180°), of de som van alle rond een punt gemeten hoeken is 400 gr (360°) etc. Dus het ging om functies van de waarnemingen waarvan de waarde van tevoren bekend was. Deze functies kunnen altijd zo geformuleerd worden dat de waarde gelijk is aan nul. Als we zoals in annex 1 de waarnemingen weergeven door $\underline{x}$ en we formuleren voorwaarden:

$$\underline{t} = U \cdot \underline{x} + U_0$$

dan is de verwachte uitkomst $E\{\underline{t}\} = 0$. Door het stochastische karakter van de waarnemingen zal in de regel het resultaat $\underline{t} \neq 0$ zijn. Deze tegenspraken moeten nu weggewerkt worden en dat gebeurt met het kleinste kwadraten algoritme van annex 1.

In de praktijk blijkt het opstellen en uitwerken van voorwaardenvergelijkingen niet altijd zo eenvoudig als hierboven werd beschreven. Daarom werd een alternatief geformuleerd, *Standaardvraagstuk II*. Hierbij werden de waarnemingen uitgedrukt als functies van de onbekende grootheden, de *waarnemingsvergelijkingen*. Zo werden bijvoorbeeld gemeten richtingen of hoeken en afstanden, zeg $\underline{x}$, uitgedrukt als functies van de coördinaten, zeg $\underline{Y}$. Als deze relatie een eenvoudige lineaire vorm heeft:

$$\underline{X} = A \cdot \underline{Y} + A_0$$

dan kan de oplossing gevonden worden met het algoritme van annex 2. Meestal is de relatie niet lineair, zie annex 2.

Deze twee oplossingen vormen de basis voor de formulering van de overige drie standaardvraagstukken, die zijn weergegeven in annex 2. De uitwerking van die drie standaardvraagstukken is steeds gebaseerd op een combinatie van de algoritmes voor standaardvraagstukken I en II. Daarbij wordt opgemerkt dat de vijfde vorm niet in (Tienstra 1947) werd gegeven, maar in zijn latere boek (Tienstra 1956), zie onder. Deze is dus waarschijnlijk pas later als nieuwe variant gevonden.

Oplossing Standaardvraagstuk III en vereffening in fasen

De uitwerking van Standaardvraagstuk III verdient hier meer aandacht, omdat die tot het inzicht leidde dat bij de methode der kleinste kwadraten problemen in meerdere fasen kunnen worden opgelost. De startvergelijkingen bestaan hier uit twee groepen (zie annex 2):

$\underline{X} = A \cdot \underline{Y} + A_0$ en $U \cdot \underline{Y} + U_0 = 0$

De eerste groep bestaat uit waarnemingsvergelijkingen als in Standaardvraagstuk II. De eerste fase van de oplossing kan dus gevonden worden met het algoritme van annex 2. Dat levert tussenresultaten. Omdat er voorwaardenvergelijkingen voor de onbekenden worden geformuleerd zijn er afhankelijkheden tussen deze onbekenden, Dus er zijn te veel onbekenden ingevoerd. We schrijven die uitkomst als $\underline{Y}'$ met de matrix van gewichtscoëfficiënten $g_{Y'Y'}$.

De tweede groep bestaat daarom uit voorwaardevergelijkingen als in Standaardvraagstuk I, maar nu voor de onbekenden $\underline{Y}'$. In (Tienstra 1947) werd aangetoond dat de voorwaarden ook voor functies van de oorspronkelijke waarnemingen konden worden geformuleerd.

Dat betekent dat het oplossingsalgoritme van annex 1 kan worden toegepast. Hierin wordt $\underline{Y}'$ ingevoerd in plaats van de waarnemingen $\underline{x}$ en verder voeren we voor de gewichtscoefficienten $g_{Y'Y'}$ in in plaats van g_{xx} .

Dit geeft als resultaat de kleinste kwadratenschatter $\underline{Y}$ voor de onbekenden. De gecorrigeerde waarnemingen volgen dan uit:

$\underline{X} = A \cdot \underline{Y} + A_0$

Tienstra toonde aan dat oplossing in fasen dezelfde resultaten geeft als een oplossing in één stap. De oplossingen voor de Standaardvraagstukken IV en V zijn via een dergelijke opsplitsing in fasen ook eenvoudig te vinden.

In geval de vereffening gebaseerd is op de formulering van *Standaardvraagstuk I* gaat een vereffening in fasen als volgt. Als de waarnemingen in de voorwaardenvergelijkingen worden ingevoerd krijgt men de sluittermen:

$\underline{t} = U \cdot \underline{x} + U_0$

Deze vergelijkingen kunnen nu in twee groepen worden gesplitst:

$\underline{t}_1 = U_1 \cdot \underline{x} + U_{01}$ en $\underline{t}_2 = U_2 \cdot \underline{x} + U_{02}$

Als de eerste groep wordt opgelost met het algoritme van annex 1 volgt daaruit het tussenresultaat $\underline{X}$ met g_{XX} . Dit resultaat, ingevoerd in de tweede groep geeft:

$\underline{t}'_2 = U_2 \cdot \underline{X}' + U_{02}$

Als nu g_{XX} in het algoritme van annex 1 wordt ingevoerd in plaats van g_{xx} dan volgen als eindresultaat de vereffende waarnemingen $\underline{X}$ en dit is weer hetzelfde resultaat als bij een vereffening in één keer. Dus de voorwaardenvergelijkingen kunnen groepsgewijs vereffend worden. Baarda zou hier later gebruik van maken bij het ontwikkelen van toetsmethoden voor het opsporen van fouten in de waarnemingen.

Tienstra liet ook zien dat de oplossing in twee fasen verder opgesplitst kon worden in een willekeurig aantal fasen. Het maximumaantal was afhankelijk van het aantal overtallige waarnemingen en dus in principe van het aantal voorwaarden. Bovendien liet hij zien dat deze benadering bij alle kleinste kwadratenproblemen gevolgd kon worden. De methodiek bleek dus algemeen toepasbaar.

Tienstra noemt de mogelijkheid om vereffeningsvraagstukken in meerdere stappen of fasen op te splitsen "the principal property of the method of least squares". Dit was van groot belang voor de landmeetkunde en de geodesie, omdat metingen vaak in meerdere fasen worden uitgevoerd. De resultaten van de uitwerking van een eerdere fase konden nu ingevoerd worden in de vervolguitwerking wanneer nieuwe metingen werden toegevoegd, dus als meetnetwerken stapsgewijs werden uitgebreid. Bovendien zou vooral Baarda later het onderscheid maken tussen de vereffening van nieuw gemeten netwerken op zich en hun aansluiting op gegeven coördinaten in tweede fase.

Opmerking: het hier beschreven proces van een vereffening in meerdere stappen, of fasen, is gedefinieerd voor de situatie in de landmeetkunde en geodesie waarin de meting van netwerken stap voor stap wordt uitgevoerd over een relatief lange periode. Dit is een nogal statische benadering. Het algoritme komt echter overeen met een Kalmanfilter zoals dat voor dynamische meetprocessen is gedefinieerd.

3.5.2 Het boek

Het materiaal van (Tienstra 1947) en (Tienstra 1948) is verwerkt in een syllabus voor een cursus, die Tienstra in 1949 verzorgde op het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Het

collegedictaat "*Waarnemingsrekening delen I en II*" verscheen in 1951, het sterfjaar van Tienstra. Dit dictaat vertoont waarschijnlijk grote overlap met genoemde syllabus. In deel II van het dictaat is ook standaardvraagstuk V toegevoegd, zie annex 2.

Deze cursus gaf dus een vrij volledig overzicht van het werk waarmee hij over vele jaren de waarnemingsrekening vormgaf. Deze benadering zou voortaan gevolgd worden bij de verdere ontwikkeling van het gedachtegoed van de Delftse School, tot in de jaren '80. Na zijn overlijden in 1951 werd het dictaat uitgewerkt en in het Engels als boek gepubliceerd bij Elsevier in 1956 onder de titel: "*The Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations*". Dit boek heeft een grote impact gehad in internationale geodetische kringen. Tot lang na het verschijnen werd in wetenschappelijke publicaties en latere leerboeken naar dit boek verwezen.

In het boek staat vermeld dat het bezorgd is door vrienden. Baarda zou na het overlijden van Tienstra het stokje overnemen. Het is duidelijk dat hij een groot aandeel had in de publicatie. Hij zou doorgaan waar Tienstra moest stoppen.

3.6 Enkele afrondende opmerkingen

3.6.1 Het gebruik van complexe getallen

In paragraaf 3.2 is de publicatie (Tienstra 1933) besproken. Naast het hoofdthema van die publicatie is het interessant om te zien hoe Tienstra gebruik maakt van complexe getallen. Hij doet dat voor het definiëren van cirkelvormige standaardellipsen en voor het uitvoeren van een gelijkvormigheidstransformatie op de coördinaten. Geodeten waren bekend met complexe getallen omdat ze gebruikt werden in wiskundige formuleringen van kaartprojecties. In één van de afleidingen (Tienstra 1933, blz. 664 onderaan) komt hij tot de formule, hier enigszins geparafraseerd:

$$ln\ \xi_{jik} = A_{jik} + i \cdot a_{jik}$$

A_{jik} is daarin de natuurlijke logaritme van de lengteverhouding van twee zijdes *ij* en *ik*, en

a_{jik} is de hoek tussen deze twee zijdes. Hierin herkent men de structuur van de Π-grootheden die Baarda later zal introduceren, zie paragraaf 4.4 hieronder.

Baarda schrijft in (Baarda 2002) dat Tienstra ook complexe getallen gebruikte in een artikel over de berekening van veelhoeken. Dat artikel heb ik niet kunnen vinden. Waarschijnlijk gaat het over een rapport dat op de congressen van de Nederlandse Landmeetkundige Federatie in 1937–39 werd besproken (Tienstra 1937). Ook in de HTW '38 wordt weer gebruik gemaakt van complexe getallen voor het uitvoeren van gelijkvormigheidstransformaties. Voor het aansluiten van twee puntenvelden moeten die in een gemeenschappelijk coordinatenstelsel berekend worden. Als dat niet het geval is, kan men de coördinaten van het ene stelsel naar het andere omrekenen. Indien daarbij de eis gesteld wordt dat hoeken en alle lengteverhoudingen tussen alle mogelijke groepen van drie punten niet vervormen, wordt een gelijkvormigheidstransformatie uitgevoerd. In paragraaf 15 van HTW '38 (blz. 68–69) wordt het formalisme voor deze transformatie gegeven in de vorm van complexe getallen, net als in (Tienstra 1933). Deze benadering is duidelijk te herkennen als een voorloper op het gebruik van complexe getallen in de S-transformatie, zoals Baarda die later zal formuleren.

3.6.2. De ontwikkeling van een theorie zonder goede rekenfaciliteiten

In paragraaf 3.1 is al uitgelegd dat in de tijd dat Tienstra begon met zijn onderzoek de rekentechniek nog berustte op handmatige methodes. Berekeningen werden uitgevoerd met behulp van logaritmetafels en handrekenmachines of elektrische machines, zoals respectie-

velijk de Brunsviga of Friden machines. Daarom werden praktische ad-hocmethoden bedacht om de berekeningen voor het verwerken van tegenspraken in de gegevens eenvoudig, of in ieder geval hanteerbaar, te houden. De rekenkundige processen voor het oplossen van grote stelsels met lineaire vergelijkingen werden te ingewikkeld en tijdrovend gevonden. De tijd van de computer was nog lang niet aangebroken.

Het was daarom zo bewonderenswaardig dat Tienstra het inzicht had dat uiteindelijk het gebruik van al die benaderingsmethodes zou leiden tot spanningen in geodetische netwerken; spanningen die op termijn zeer storend zouden worden. Hij begreep dus dat de geodesie een coherente wetenschappelijke theorie nodig had op basis waarvan rekenmethodieken konden worden ontwikkeld, waarmee op verantwoorde wijze het stochastische karakter van de metingen werd behandeld.

Zijn benadering sloot aan bij ontwikkelingen in de mathematische statistiek in zijn tijd, maar hij had grote aarzeling om de wiskundige modellen van de negentiende eeuw zonder meer toe te passen. Hij probeerde, zoals in paragraaf 3.4 is beschreven, vanuit een zuiver empirische basis te werken zonder (te veel) a priori aannames. De brede toepassing van zijn ideeën in de praktijk liet nog wel op zich wachten tot de opkomst van de moderne computers in de jaren '60 en '70. Baarda zou daar later een grote impuls aan geven met de oprichting van het Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek (LGR). Maar het werk van Tienstra vormde wel de wetenschappelijke basis waarop Baarda verder voort zou bouwen.

3.6.3. Weinig vermelding van bronliteratuur

Naast dat bekend is dat Tienstra sterk beïnvloed was door de omgeving van Van Dantzig en Mannoury, (Bijlagen I.b en I.c) zijn er verder weinig aanwijzingen welke verdere invloeden er op zijn denken zijn geweest. In (Baarda 2002, Bijlage I.a) wordt nog het boek van Von Mises genoemd en daarnaast de filosofen A. N. Whitehead en H. Reichenbach.

Er zijn enkele literatuurverwijzingen in (Tienstra 1956). Zijn overige publicaties geven geen of nauwelijks literatuurverwijzingen. Toch waren er voor zijn tijd al vele belangrijke publicaties verschenen. Zo identificeerde Gauss in (Gauss 1828) al het belang van de vereffening op basis van voorwaardenvergelijkingen voor geodeten en in (Legendre 1805) werd de vereffening op basis van waarnemingsvergelijkingen geformuleerd. Bovendien werd in (Aitken 1936) het principe van de berekening met gecorreleerde waarnemingen uitgelegd. Ook werd in (Helmert 1907) een samenvattende behandeling gegeven van het gebruik van de kleinste-kwadratenmethode in onder andere de geodesie. In de publicaties van Tienstra vindt men geen verwijzingen naar deze of andere bronnen. Dat was vroeger blijkbaar niet gebruikelijk en redacteuren van tijdschriften vroegen er wellicht nog niet om.

4. Periode Baarda

4.1 Praktijkervaring als landmeter

Willem Baarda, geboren 20-07-1917 te Leeuwarden, werd per 1 november 1946 benoemd tot lector in *het Landmeten, het Waterpassen en de Geodesie* bij de afdeling der Weg- en Waterbouwkunde van de TH te Delft. Daarvoor had hij vanaf 1940 als landmeter bij het Kadaster verschillende functies vervuld (Hoek 1982), (Alberda 2005, zie ook bijlage II.b). In de tijd dat hij in Zwolle was aangesteld als toegevoegd landmeter, bestond zijn taak voor een belangrijk deel uit het leggen van een meetkundige grondslag voor de pas drooggevallen Noordoostpolder. Zoals Van der Hoek beschrijft, zullen de ervaringen opgedaan in die periode van grote invloed zijn op zijn latere theoretische werk.

> *Op 1 januari 1942 werd Baarda benoemd tot Landmeter van het Kadaster en twee maanden later overgeplaatst naar het Bureau Zwolle van de Dienst voor Buitengewoon Landmeetkundig Werk (BLW). Deze dienst was kort daarvoor in het leven geroepen om hermetingen en andere kadastrale vernieuwingen te verzorgen. Baarda kwam er als "toegevoegd" landmeter hetgeen betekende dat hij binnen het gehele wijde gebied van het Bureau Zwolle inzetbaar was. Een belangrijk deel van het werk van een landmeter bij de dienst voor BLW bestond uit het leggen van meetkundige grondslagen volgens de richtlijnen van de Handleiding voor Technische Werkzaamheden van het Kadaster, kortweg de HTW 1938. In het kort kwam de methode vlakke puntsbepaling van die tijd neer op het kiezen van snelliuspunten, deze verbinden met veelhoeken en binnen dit veelhoeksnet een meetlijnennet ontwerpen waaraan de detailmeting werd vastgeknoopt. Zelfs voor hen die zich meer dan oppervlakkig in het vak verdiepten was deze werkwijze alleszins aanvaardbaar. Maar niet voor Baarda! Hij kwam al spoedig tot het oordeel dat de methode "niet klopte", d.w.z. tot tegenstrijdigheden voerde.*
>
> *Het van begin af aan meeslepen in de berekening van de coördinaten van gegeven punten waardoor controle op eigen waarnemingen werd vertroebeld o.a. door fouten in de R.D.-punten was een van de dingen die niet klopten. Het feit dat men ook na de vereffening van de grondslag bij doorrekening van het veelhoeksnet langs verschillende wegen tot verschillende coördinaten kon komen voor hetzelfde punt bracht Baarda tot de conclusie dat men eigenlijk niet wist wat de betekenis en de waarde van de coördinaten waren! Ook op het eerste gezicht onverklaarbare sprongen in de waarnemingsreeksen bij de richtingsmeting kregen de wetenschappelijke belangstelling van Baarda.*
>
> *De Noordoostpolder was in 1942 drooggemalen en werd met de gebrekkige middelen die men in de oorlogstijd had, stukje bij beetje in cultuur gebracht. De kadastrering van deze enorme vlakte van slik en riet was een van de taken van het bureau Zwolle. Baarda heeft een zeer groot deel van dit werk gedaan. Hij maakte daarbij van de gelegenheid gebruik allerlei foutentheoretische onderzoekingen te doen. Ook deed hij refractiemetingen waarbij hij een theorie opbouwde voor het berekenen van regelmatige dichtheidsverschillen. Het Hoofd van het Bureau Zwolle de heer H. Vermeulen voerde een wijs beleid en liet Baarda alle vrijheid om dit werk te doen. Baarda zelf is deze geboden kans nooit vergeten. Nog jarenlang heeft hij contact gehouden met zijn vroegere chef tot diens overlijden toe.*
>
> *Wonende op een kamertje in Zwolle begon Baarda de theorie die hij bij Tienstra had geleerd opnieuw op te bouwen. Dat moest hij uit zijn hoofd doen omdat hij de desbetreffende collegeaantekeningen niet bij zich had en de mogelijkheid (het was inmiddels 1944 geworden) om te reizen door de oorlogsomstandigheden niet meer bestond.*
>
> *Voortbouwend op de ervaring dat sluitvectoren van veelhoeken meestal in de richting van de veelhoek liepen ontwierp hij de vereffeningsmethode II. In datzelfde kamertje vond*

Baarda ook het principe waaruit later de gehele schrankingstheorie voort zou komen. Ook hield hij zich bezig met het begrip controle. Uit de ideeën die hij daarover toen ontwikkelde kwam later zijn toepassing van de statistische theorie voort. Het jaar 1944 is waarschijnlijk wel de vruchtbaarste denkperiode geweest. Zijn hele verdere wetenschappelijke werken is een uitwerking geweest van ideeën uit die tijd. Een uitvoeren van een program van aktie zoals hij zelf wel eens zei.

Uit het bovenstaande blijkt dat Baarda in die tijd tot het inzicht kwam dat het wenselijk was om de metingen zo in te richten, dat de nieuwe grondslag eerst zelfstandig getoetst kon worden om te zien of er geen fouten gemaakt waren in de nieuwe waarnemingen. Pas daarna, in tweede fase, zouden de nieuwe metingen moeten worden aangesloten op gegeven punten, om na te kunnen gaan of die niet verstoord waren. In wezen had hij hier al de grondgedachten van zijn latere Schrankingstheorie voor zichzelf geformuleerd.

Naar aanleiding van deze bevindingen heeft hij rond 1950 een studie gemaakt van de verschillende in de landmeetkunde gebruikte methodes voor het aansluiten van driehoeksnetten op de coördinaten van gegeven punten. De resultaten van deze methoden vergeleek hij met de resultaten van de strenge toepassing van de kleinste-kwadratenmethode voor aansluitingen op basis van gelijkvormigheidstransformaties. De resultaten van deze studie werden later gepubliceerd als verdere toelichting op de behandeling van deze onderwerpen in de HTW '56, zie (Baarda 1957). Dit was dus in feite een eerste aanzet tot uitwerking van zijn ideeën die tot de Schrankingstheorie zouden leiden. Bovendien werd hem duidelijk dat de in de HTW '38 beschreven benadering voor de precisie van de gegeven punten en voor de na te streven precisie van de eindresultaten, te eenvoudig en te streng was. Dit inzicht bracht hem later tot de formulering van zijn criteriummatrices en de daaruit afgeleide vervangingsmatrices.

In die periode heeft hij veel contact met zijn leermeester Tienstra en deze contacten zullen zeker een belangrijke rol gespeeld hebben bij zijn aanstelling aan de TH te Delft. Als lector werkte hij nauw samen met Prof. Tienstra en werd hij ingevoerd in diens aanpak van zijn theoretische werk. Hij was daardoor de aangewezen opvolger en nam de taken van Tienstra over bij het tot stand komen van de HTW 56. Tevens vervulde hij een hoofdrol bij de postume verschijning van het boek (Tienstra 1956), dat het werk van Tienstra samenvatte. Baarda zou Tienstra's benadering van de waarnemingsrekening als uitgangspunt nemen voor zijn verdere werk, dat zich vooral richtte op het ontwikkelen van een theoretisch kader voor het beoordelen van de kwaliteit van geodetische metingen.

4.2 De invloed van David van Dantzig

Zoals we eerder zagen was Tienstra onder de invloed gekomen van de ideeën van Mannoury en vooral van David van Dantzig. Hij bracht Baarda in contact met die ideeën. Van Dantzig werkte in de eerste helft van de twintigste eeuw bij het Mathematisch centrum in Amsterdam en aan de TH Delft. Vooral bij het Mathematisch Centrum was hij betrokken bij de revolutionaire ontwikkeling van de wiskunde in die tijd, zoals beschreven in (Alberts 2000 a, b en c), zie ook bijlage I.b. Het zoeken was naar de rol die de wiskunde steeds pregnanter ging spelen in vele toepassingsgebieden zoals de natuurkunde, economie, biologie en techniek. Men werd er in die tijd steeds nadrukkelijker mee geconfronteerd dat die wetenschappen altijd uitgingen van waarnemingen, die bij herhaling een zekere spreiding bleken te vertonen. De waarnemingsresultaten konden dus niet zonder meer in sluitende wiskundige modellen worden ingevoerd. Dit vormde een probleemveld dat niet direct werd begrepen. Het riep filosofische vragen op over de rol en toepasbaarheid van de wiskunde en de recent ontwikkelde mathematische statistiek.

Baarda volgde de Kadercursus Statistiek die Van Dantzig in de jaren 1946–47 verzorgde aan de TH (Dantzig 1947). Deze cursus behandelde de volgende thema's:

a) de betekenis van het stochastische karakter van waarnemingen (metingen),

b) de rol van wiskundige modellen bij de verwerking van de waarnemingen,

c) het in- en uitschakelen van deze modellen bij de verwerking van meetresultaten,

d) het vóórkomen van tegenspraken in deze resultaten als gevolg van:
   - het stochastische karakter van de waarnemingen <u>of</u>
   - tekortkomingen van het wiskundige model <u>of</u>
   - meetfouten.

Waarschijnlijk volgde hij ook de cursus die Van Dantzig verzorgde in het kader van het Studium Generale aan de TH Delft (Dantzig 1945–47). Een samenvatting van deze ideeën vindt men in (Dantzig 1947). Deze ideeën hebben Baarda voor de rest van zijn actieve leven sterk beïnvloed. Met name de hierboven genoemde items c) en d) spelen een belangrijke rol in het werk van Baarda. De in- en uitschakeling van wiskundige modellen speelt op twee niveaus:

1. Als het gedrag van waarnemingen, dat is de spreiding bij een voldoende groot aantal herhaalde waarnemingen, daartoe aanleiding geeft wordt de normale verdeling ingevoerd als kansdichtheidsfunctie. Baarda is hierin pragmatischer en stelt dat de ervaring in de landmeetkunde voldoende aanleiding geeft om dit model als standaard te hanteren, tenzij de waarnemingen echt reden geven om hiervan af te wijken. In deze pragmatische benadering hanteert hij dan ook de *Centrale Limietstelling*. Dan geldt, zoals we eerder zagen, voor stochastische grootheden x dat, wanneer men het gemiddelde berekent, dit gemiddelde dan bij voldoende grote n stabiliseert om een verwachtingswaarde:

   $$X_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \rightarrow E\{x\} = \lim_{n \to \infty} X_n = \mu_x$$

2. Op het tweede niveau speelt dit een rol bij het definiëren van een functioneel (mathematisch) model voor de waarnemingen. Dit is een model voor de fysische realiteit die men door middel van metingen wil vastleggen. Het wordt uitgedrukt in een aantal wiskundige relaties tussen de waarnemingsgrootheden onderling (in de vorm van voorwaarden waaraan de waarnemingen moeten voldoen) en tussen de waarnemingen en te bepalen onbekende grootheden, zoals te berekenen coördinaten.

Baarda is sterk beïnvloed door deze denkwijze. Hij kan zich daardoor minder dogmatisch opstellen dan Tienstra in de afwijzing van de axioma's, die in de literatuur aan de kleinstekwadratenmethode ten grondslag worden gelegd.

In de postume uitgave van (Tienstra, 1956) is de invloed van deze benadering duidelijk terug te vinden in de inleiding van hoofdstuk 9.

THE CONTROL OF THE MODEL AND NUMERICAL
DETERMINATION OF THE MODULUS; MEAN (SQUARE) ERROR.

9.1 Introduction. *– It is obvious that an observer will be interested in knowing how well his observations fit the assumed mathematical model. If the model is given in the form used in Standard Problem I, the contradictions in the relationships apparently provide this information. However, the difficulty is that these contradictions depend not only on the fluctuating character of the observations, but also on the degree of perfection with which the assumed model fits the actual conditions.*
In the existing terminology the contradictions resulting from the observations are called

"accidental errors"; those resulting from the model are called "systematic errors". Systematic errors are considered to be traceable to the influences of temperature, the observation model employed, etc. When these have been sufficiently removed, the remaining errors are considered to be accidental. This notion of "error" is the central point in the classical development. The concept of "true value" is also used: there is a true value of each quantity to be measured, and a true value minus a measured value is a "true error". The classical theory also uses an "apparent error". By this is meant a reference value minus an observation. The reference value is the adjusted value found by the application of least squares. The apparent error is therefore <u>the opposite</u> of the "correction" applied to the observations in the theory as developed in this book.
Criticism of the classical development is based on the following points.

1. *It is wrong to base the theory on the concept of "error" as starting point. We may only speak of an error after we have defined a reference value. This reference value can be nothing but a function of the observations. The observation, therefore, is primary and should logically be the point of departure in developing the theory.*
2. *The concepts of "true value" and "true error" are completely fictitious and physical absurdities. There is, for instance, no true length of a measuring rod.*
3. *It is certainly improper to speak of an "accidental error" as a defined quantity, as there is no end to eliminating systematic errors.*
4. *The term "systematic error" is at best misleading. In the classical theory "error" is always connected with observation. The fact that systematic errors indicate imperfections in the mathematical model is more or less concealed by the misleading name.*

<u>None of these doubtful concepts were necessary to the development of the theory presented here</u>. We are only concerned with the observations, the mathematical model, and the method of least squares for adjusting the observations in such a manner that they fit the assumed model. The model may be more or less complete, the observations may be made carefully or roughly; these two factors determine the size of the contradictions when the observations are substituted in the model. This is the true character of the problem.

Een opmerking op blz. 305 in (Tienstra 1948) en een opmerking in de paragraaf "FILOSOOF" in (Baarda 2002) bijlage I.a, doen vermoeden dat dit hoofdstuk op initiatief van Baarda zelf is toegevoegd. Eerst aan de syllabus (Tienstra 1951) en later aan het boek (Tienstra 1956). Deze inleiding behandelt dezelfde onderwerpen als genoemd in (Tienstra 1948), maar ze worden hier verder uitgewerkt tot uitgangspunten van de toetsingstheorie die Baarda later zal ontwikkelen. In dit hoofdstuk voegt Baarda de daad bij het woord door te laten zien dat de histogrammen van Tienstra zich goed laten beschrijven door de verdelingsfunctie van Gauss-Laplace voor de normale verdeling. Zo kan hij later gebruik maken van toetsingsmethoden die in de mathematische statistiek op basis van deze verdeling zijn ontwikkeld.

Baarda zal voortaan het functionele model formuleren voor de verwachtingswaarden van de waarnemingsgrootheden en de onbekenden. De originele waarnemingen zullen er door hun stochastische karakter niet aan voldoen. De kleinste-kwadratenmethode geeft dan schatters die er wél aan moeten voldoen. Door deze filosofie van het in- en uitschakelen van modellen kan hij voor deze pragmatische benadering kiezen. De consequentie is wél dat men over goede toetsmethoden moet beschikken om te bezien of de gemaakte modelkeuzes verantwoord zijn. De sluitfouten van de voorwaardenvergelijkingen bevatten dan de informatie waar deze toetsen op gebaseerd moeten zijn. Baarda zal een groot deel van zijn werk wijden aan het formuleren van zo'n toetsmethodiek.

4.3 De HTW ‘56

In 1950 werd Tienstra samen met de landmeters 1ste klasse van het Kadaster D. de Groot en Ir. F. Harkink gevraagd om een nieuwe HTW samen te stellen. Bij het overlijden van Tienstra in 1951 nam Baarda zijn rol over. In deze nieuwe HTW valt een paar zaken op:

Hoofdstuk II behandelt de meting van nieuwe puntenvelden en hun aansluiting op het RD-net. In paragraaf II.2 worden gelijk de verkenningseisen voor nieuwe metingen behandeld. Baarda’s ervaringen tijdens zijn werk in de Noordoostpolder blijken hierbij uit het feit dat nu de nadruk niet zozeer ligt op criteria voor puntnauwkeurigheid. De nieuwe eisen worden geformuleerd vanuit de gewenste relatieve nauwkeurigheid tussen punten. De gewenste nauwkeurigheid van coördinaatverschillen tussen punten wordt gegeven door een cirkel waarvan de straal een functie is van de afstand tussen de punten. De gewenste puntnauwkeurigheid wordt gegeven door een cirkel waarvan de straal een functie is van de afstand tot de dichtstbij liggende gegeven punten. Deze cirkels gelden als criterium voor de nauwkeurigheid, berekende standaardellipsen moeten erbinnen liggen. Later vond Baarda dat ook deze opzet tot problemen leidde en ontwikkelde hij in zijn publicatie van 1973 een criteriummatrix.

Paragraaf II.3 begint met een verhandeling over het wezen van coördinaten. Ook hier is weer de invloed van Van Dantzig terug te vinden, vooral in de eerste alinea. Men kan zich afvragen of de formulering door de gemiddelde praktiserend landmeter wel goed begrepen werd.

Paragraaf IV.10 gaat over de aansluiting van verdichtingsnetten (driehoeksnetten) op RD-coördinaten. Hierbij worden gelijkvormigheidstransformatie en affiene transformaties behandeld, zowel direct als overbepaald (dat is op meer aansluitpunten dan strikt nodig). De overbepaalde gelijkvormigheidstransformatie wordt uitgelegd in subparagraaf I.1a (blz. 106–107). Daarbij wordt de opmerking gemaakt dat het verstandig is om eerst op slechts twee punten aan te sluiten om te bezien of er relatieve vervormingen tussen beide systemen optreden. Die kunnen dus wijzen op verstoorde RD-punten, maar ook op fouten in de aan te sluiten nieuwe metingen. Deze opmerking loopt duidelijk vooruit op de vereffening en toetsing in fasen, zoals die met de latere schrankingstheorie kunnen worden uitgevoerd.

De overbepaalde niet lineaire gelijkvormigheidstransformatie wordt in subparagraaf I.2 (blz. 108–109) geformuleerd met complexe getallen, in navolging van Tienstra in de HTW ’38. Het voorbeeld behandelt de aansluiting van twee puntenvelden door middel van een tweede orde polynoom. De nieuw ingemeten punten worden met een zgn. interpolatie van Lagrange geïnterpoleerd tussen de aansluitpunten. Zou je de formules vereenvoudigen voor een aansluiting via een eerste orde polynoom (dus een gewone gelijkvormigheidstransformatie), dan is uit de interpolatieformules eenvoudig de later S-transformatie van Baarda af te leiden. Zoals verderop zal blijken was het inderdaad zo dat hij zijn ideeën al ontwikkelde met het concept van de S-transformaties, of voluit Schrankingstransformaties, in het achterhoofd. Hij werkte al vanaf de jaren ’40 vanuit dit idee. Het is niet helemaal duidelijk waarom hij dit niet expliciet vermeldde in zijn publicaties.

***Hoofdstuk* X** behandelt de toetsing van meet- en rekenuitkomsten. (Zie symboolgebruik in annex 1). Voor voorwaardenvergelijkingen $\underline{t} = u \cdot \underline{x} + u_0$ geldt dat de verwachtingswaarden van de sluittermen $E\{\underline{t}\} = 0$. Men kan er dus van uitgaan dat mogelijke meetfouten of verstoringen in de aansluitpunten van een netwerk in de vergelijkingen voor $\underline{t}$ waarden geven die sterk van nul verschillen. In hoofdstuk X wordt nu een toetsingsmethodiek ingevoerd die streng aansluit bij recent ontwikkelde mathematische statistiek, zoals Baarda die door Van Dantzig had leren kennen. Hij maakte voor zijn werk veel gebruik van eerdere uitgaven van

(Cramer 1957). De behandeling hier sluit aan bij de opmerkingen die ook al in hoofdstuk 9 van (Tienstra 1956) waren gemaakt.

Voor de gecorrigeerde waarneming $\underline{X} = \underline{x} + \underline{v}$ geldt dat $u \cdot \underline{X} = 0$, dus ze voldoen aan de gestelde voorwaarden. Voor kleinste kwadraten correcties $\underline{v}$ geldt dat $\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v} = \underline{t}^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t}$ en een grootheid $\underline{\sigma}_t^2$ wordt berekend uit $\underline{t}^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t}/b = \underline{\sigma}_t^2$

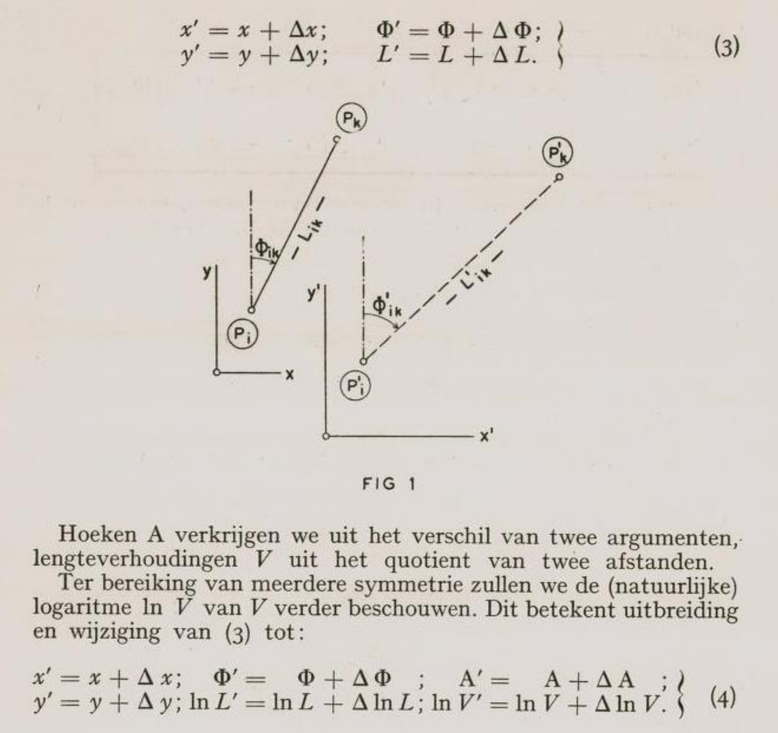
Op basis van lange ervaring werd een waarde gekozen voor de variantiefactor σ^2 zo dat $\sigma^2 \cdot g_{xx} = \sigma_{xx}$ een correcte weergave is van de precisie van de waarnemingsgrootheden $\underline{x}$. Dan volgt uit het feit dat er b voorwaardenvergelijkingen zijn dat de grootheid $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2$ een Fisher-verdeling heeft met respectievelijk b en ∞-veel vrijheidsgraden (Cramer, 1957) (Hogg en Craig 1970). Dus $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 = \underline{F}_{b,\infty}$

Aan de hand hiervan wordt nu een strenge statistische methode van toetsen ingevoerd. Daarnaast wordt het begrip “onderscheidend vermogen” van de toets uitgelegd. Dit geeft aan hoe groot een verstoring in de gegevens moet zijn om met een kans β (meestal op 80% gesteld) opgespoord te kunnen worden. Vanuit deze begrippen zal Baarda later de zgn. *B-methode van toetsen* ontwikkelen en het begrip *grenswaarde* invoeren.

4.4 De geboorte van de Π-grootheden.

4.4.1 Introductie van $\Delta\Lambda_{ik}$ berekend uit coördinaten (Baarda 1957)

De materie die in hoofdstuk 10 van de HTW ‘56 aan de orde kwam houdt Baarda al langer bezig. In 1957 publiceert hij een artikel in het tijdschrift “Kadaster & Landmeetkunde” waarin hij de stof verder uitwerkt (Baarda 1957). Deze uitwerking wordt helemaal geformuleerd in complexe getallen, in navolging van wat Tienstra eerder in (Tienstra 1933) en in de HTW ‘38 deed en Baarda zelf in de HTW ‘56. Hij beschouwt de transformatie van een stelsel met de coördinaten *(x, y)* naar *(x’, y’)* waarbij er slechts kleine verschillen in de coördinaatwaarden zijn, zodat *(x’, y’) = (x + Δx, y + Δy)*, zie Fig. 8.



$$x' = x + \Delta x; \quad \Phi' = \Phi + \Delta\Phi; \qquad y' = y + \Delta y; \quad L' = L + \Delta L. \qquad (3)$$

FIG 1

Hoeken A verkrijgen we uit het verschil van twee argumenten, lengteverhoudingen V uit het quotient van twee afstanden.
Ter bereiking van meerdere symmetrie zullen we de (natuurlijke) logaritme ln V van V verder beschouwen. Dit betekent uitbreiding en wijziging van (3) tot:

$$x' = x + \Delta x; \quad \Phi' = \Phi + \Delta\Phi \; ; \quad A' = A + \Delta A \; ; \qquad y' = y + \Delta y; \ \ln L' = \ln L + \Delta \ln L; \ \ln V' = \ln V + \Delta \ln V. \qquad (4)$$

Fig. 8: Extract uit (Baarda, 1957)

Hierin valt op dat “ter bereiking van meerdere symmetrie” naast het “argument” (of “azimut”) Φ de natuurlijke logaritme van de lengte $ln\ L$ wordt ingevoerd en dat naast de hoek A ook de natuurlijke logaritme van de lengteverhouding $ln\ V$ wordt ingevoerd.

Even verder in de tekst gaat de behandeling over op het gebruik van complexe getallen:

$z = y + i \cdot x$ en $z' = y' + i \cdot x'$ en gezien het bovenstaande is: $z' = z + \Delta z = (y + \Delta y) + i \cdot (x + \Delta x)$
Tussen twee punten i en k zijn dan in beide systemen de coördinaatverschillen:
$z_{ik} = z_k - z_i$ met argument Φ_{ik} en lengte L_{ik} en
$z'_{ik} = z'_k - z'_i$ met argument Φ'_{ik} en lengte L'_{ik}

Dan wordt de grootheid $\Delta\Lambda_{ik}$ ingevoerd als $\Delta\Lambda_{ik} = ln\ (z'_{ik} / z_{ik}) = ln\ (z'_{ik}) - ln\ (z_{ik})$

Met $\Delta\Phi_{ik} = \Phi'_{ik} - \Phi_{ik}$ en $\Delta ln\ L_{ik} = L'_{ik} - L_{ik}$ wordt dan $\Delta\Lambda_{ik} = \Delta ln\ L_{ik} + i \cdot \Delta\Phi_{ik}$

Later wordt voor drie punten j, i, en k met zijdes z_{ij} en z_{ik} nog voor de hoek A_{jik} en de lengteverhouding V_{jik} gesteld dat (zij het in iets andere vorm):

$ln\ \Delta V_{jik} + i \cdot \Delta A_{jik} = \Delta\Lambda_{ik} - \Delta\Lambda_{ij}$

In dit artikel behandelt Baarda de aansluiting tussen coördinatenstelsels met kleine verschillen in de coördinaatwaarden. Hij komt daarbij nog niet tot de interpretatie

$\Lambda_{ik} = ln\ z_{ik}$ en vandaar tot $ln\ V_{jik} + i \cdot A_{jik} = \Lambda_{ik} - \Lambda_{ij}$

Tienstra gebruikte deze benadering, zij het met andere symbolen ook al (Tienstra 1933). Baarda verwijst daarnaar in het inleidende hoofdstuk van (Baarda, 1973) en in (Baarda 2002) bijlage I.a, en hij noemt ook een artikel over veelhoekberekeningen waarin Tienstra complexe getallen gebruikt. In (Baarda 1977) bijlage II.a, stelt hij dat hij de theorie voor de beschrijving van de puntsbepaling in het platte vlak zo rond 1958 volledig vormgaf met behulp van de complexe-getallenalgebra. Toch duurde het nog tot de tweede helft van de jaren zestig voor hij hierover publiceerde. Zijn collegedictaten over puntsbepaling in het platte vlak verschijnen vanaf 1966 en zijn publicaties bij de Nederlandse Commissie voor Geodesie hierover verschijnen ook rond vanaf 1966. Zie hieronder.

4.4.2 Daar komen de Π–grootheden (Baarda 1962)

De HTW ‘56 was naar Baarda’s mening wel een stap vooruit na de HTW ‘38, maar een aantal vragen bleef toch wringen, te weten:

a) Hoe beschrijf je nu op een bevredigende manier de kwaliteit (precisie) van de coördinaten van aansluitpunten voor verdichtingsmetingen?
b) Hoe stel je eisen op het gebied van de precisie voor de coördinaten van nieuw ingemeten punten?
c) Hoe toets je of er meetfouten voorkomen in de verdichtingsnetwerken?
d) Hoe toets je aansluitpunten op het mogelijke voorkomen van verstoringen?
e) Hoe scheid je die twee type verstoringen?

Baarda was ondertussen lid geworden van Special Study Group 1:14 (SSG 1:14) van de International Association of Geodesy (IAG). Hierin trof hij een aantal collega’s die met dezelfde onderwerpen bezig waren, maar de benaderingen waren verschillend. Hij heeft daar de ideeën van Van Dantzig ingebracht en verder uitgewerkt in een aantal rapporten die later als publicaties van de Nederlandse Commissie voor Geodesie werden uitgegeven. Deze zijn nu te vinden op www.ncgeo.nl onder “Publicaties”.

Van Dantzig had erop gewezen dat de formulering van een functioneel model van essentieel belang is bij het verwerken van de waarnemingen. Dat hield in dat zo’n model geformuleerd moest worden uitgaande van schatbare grootheden, die voortkomen uit het meetproces. Dat wil zeggen dat de Centrale Limietstelling erop van toepassing moest zijn, dus het mocht

niet gebaseerd zijn op niet herhaalbare waarnemingsgrootheden en het mocht ook niet afhankelijk zijn van incidentele keuzes. Alleen onder die voorwaarden is het mogelijk om aan de hand van de verwerkte meetresultaten na te gaan of:

a) de metingen goed zijn uitgevoerd en
b) het functioneel model goed gekozen is (dus dat het aansluit bij de waarnemingen).

De positie van punten

Deze ideeën worden in een rapport voor IAG-SSG 1:14 (Baarda 1962) uitgewerkt voor de bepaling van de positie van punten in een netwerk. Het argument is dat bij de berekening van coördinaten altijd een keuze gemaakt moet worden voor een coördinatenstelsel. Het gaat om een oorsprong (twee coördinaten), een oriëntatie van de Y-as (daaruit volgt ook de richting van de X-as) en een schaalfactor voor de lengtebepaling. Dus er zijn vier parameters. Men kan ook de coördinaten van twee punten kiezen (ook vier parameters). Die punten dienen dan als rekenbasis voor de berekening van de overige punten. Daarom concludeert Baarda dat coördinaten niet voldoen aan de eis van schatbare grootheden. In het rapport voor SSG 1:14 werkt hij dit uit, zie annex 5. Daar vinden we:

$\Lambda_{ik} = \ln z_{ik}$ en daaruit volgt dan dat

$\Pi_{jik} = \ln (z_{ik} / z_{ij}) = \ln z_{ik} - \ln z_{ij} = \Lambda_{ik} - \Lambda_{ij} = \ln V_{jik} + i\, A_{jik}$

De definitie van deze Π-grootheid komt overeen met de uitdrukking in (Tienstra 1933), zie paragraaf 3.6 hierboven. Als nu twee punten als basis worden gekozen voor het berekenen van de coördinaten van de overige punten in een netwerk, dan blijkt dat de precisie σ_{XY} van de nieuwe punten alleen afhankelijk is van de precisie van de Π-grootheden die in de berekening gebruikt worden. Dus de precisie van de coördinaten is een directe functie van de precisie van deze Π-grootheden. Kies je een andere rekenbasis, dan volgt voor de coördinaten van de overige punten een andere precisie σ_{XY}. Ook hier blijkt weer dat Baarda al werkte vanuit het idee van S-stelsels.

Een analyse van het meetproces

Het idee van de Π-grootheden wordt verder uitgewerkt en de resultaten daarvan worden opgenomen in paragraaf 4 van (Baarda 1967). Uit een analyse van het landmeetkundige meetproces blijkt dat:

- Richtingsmeting met een theodoliet tussen twee punten i en j waarnemingen r_{ij} geeft die niet voldoen aan de Centrale Limietstelling, aangezien iedere keer dat een theodoliet opnieuw wordt opgezet of dat de horizontale rand wordt verzet de oriëntatie (nul-aflezing) voor de richtingsmeting verandert. Meet men echter de hoek met de richting naar een derde punt k, dan is $\alpha_{jik} = r_{ik} - r_{ij}$ Men elimineert nu dit probleem, omdat beide richtingen met dezelfde oriëntatie zijn gemeten.
- Afstandsmeting gebeurt met apparatuur die een eigen lengteschaalfactor heeft, die kan variëren met de tijd. Dus de lengte van een zijde ij is dan $l_{ij} = s \cdot d_{ij}$. Hierin is s de onbekende lengteschaalfactor en d_{ij} de met het instrument bepaalde afstand. Daar s verandert met de tijd, voldoet d_{ij} ook niet aan het Centrale Limiet Theorema. Indien men echter ook de afstand naar punt k meet, geldt $v_{jik} = l_{ik} / l_{ij} = d_{ik} / d_{ij}$. En daarmee is ook deze schaalfactor s geëlimineerd.

Door uit te gaan van hoeken als schatbare grootheden vervalt het belang van de oriëntering van het instrument, en dus van de noordrichting, uit het meetproces. Ook het feit dat lengteverhoudingen schatbare grootheden zijn, laat zien dat het belang van absolute tijdregistratie uit het meetproces vervalt. Bij elektronische afstandsmeting kan men volstaan met

een lokale tijdmeting voor de looptijd van lichtsignalen bij het meten van meerdere zijdelengtes vanuit een punt. Door lengteverhoudingen te berekenen gaat het alleen om de verhouding van die looptijden.

Door de overgang op de natuurlijke logaritme $ln\ v_{jik}$ volgen ook uit het meetproces weer Π-grootheden, nu geformuleerd met meetresultaten $\Pi_{jik} = ln\ v_{jik} + i \cdot \alpha_{jik}$. Daarmee blijkt dat de analyse van coördinatenstelsels en meetresultaten op dezelfde Π-grootheden gebaseerd kan worden. Uit deze analyse volgt dan ook dat de aansluiting tussen verschillende coördinatenstelsels, of ook de aansluiting tussen nieuwe metingen en een bestaand stelsel, op basis van een gelijkvormigheids- (of conforme) transformatie moet plaatsvinden. Zo'n transformatie heeft geen vervormend effect op deze Π-grootheden. In wezen sluit dit goed aan bij de vergelijking van aansluitingsmethodes in (Baarda 1957). Daarin werd ook al een voorkeur voor deze benadering vastgesteld.

Opmerking 1: Hierboven worden α_{jik} en v_{jik} als schatbare grootheden ingevoerd. Dat behoeft nog wel een kanttekening. Een hoek α_{jik} wordt berekend als het verschil tussen twee richtingsaflezingen op de horizontale rand van een theodoliet. Daarbij wordt de stand van deze rand als parallel aan het horizontale vlak, dus loodrecht op de richting van het schietlood gezien. Of dat zo is hangt af van hoe goed de verticale as ook inderdaad evenwijdig staat aan de richting van de zwaartekracht (zie paragraaf 2). Over het algemeen wordt aangenomen dat afwijkingen in de opstelling van de theodoliet zo gering zijn dat α_{jik} inderdaad als horizontale hoek kan worden beschouwd. De verhouding v_{jik} wordt berekend uit twee afstanden die van opstelpunt i naar de richtpunten j en k worden gemeten. Over het algemeen zullen deze punten op verschillende hoogtes liggen, maar de verschillen zullen zeker in Nederland niet groot zijn. Op de verticale rand van de theodoliet kunnen de zenithoeken van het opstelpunt naar de richtpunten worden afgelezen. Hiermee kunnen de schuingemeten afstanden geprojecteerd worden op het horizontale vlak. Vanwege de geringe hoogteverschillen zal het effect van deze omrekening op de nauwkeurigheid van de geprojecteerde afstanden gering zijn, zodat men kan aannemen dat die nauwkeurigheid hetzelfde is als die van schuin gemeten afstanden. Onder deze twee aannamen konden de grootheden α_{jik} en v_{jik} als schatbaar beschouwd worden. Men spreekt dan van vlakke meetnetwerken.

Opmerking 2: Voor het verticaal stellen van de verticale as van de theodoliet gaat men er bovendien van uit dat de richting van de zwaartekracht in verschillende opstelpunten evenwijdig is. Deze aanname is geldig als het meetnetwerk een niet al te groot gebied bestrijkt. Bij grotere netwerken is dat niet zo. Deze moet men behandelen als ruimtelijke netwerken. Zie paragraaf 4.9 hier onder.

4.5 Kringnetten

In de tijd dat Baarda het concept van zijn Π-grootheden formuleerde, rond 1960, kwamen in de geodesie ook de eerste elektronische afstandsmeters op de markt. De eerste versies waren nog wat instabiel, waardoor de lengte-eenheid van het instrument kon variëren met de tijd. Daarbij kwam dat men correcties voor temperatuur en luchtdruk moest toepassen en deze correcties regelmatig in de loop van de dag moest aanpassen. Dit leidde tot het idee om uit de geregistreerde lengtegetallen, per standplaats, lengteverhoudingen te berekenen. Dat was dan analoog aan de registratie van richtingen en de daaruit berekende hoeken en dat sloot mooi aan bij de parallelliteit van hoeken en lengteverhoudingen in de Π-grootheden. Maar met de jaren werden de instrumenten steeds stabieler en nauwkeuriger. Al snel kon men met een goede nauwkeurigheid afstanden tot enkele kilometers meten. Dit gaf meer vrijheden voor de meetconfiguraties van de landmeter in het veld.

Tot nu toe was men voor verdichtingsmetingen met hogere nauwkeurigheid aangewezen op het meten van driehoeksnetten en/of -kettingen. Daarbij moest in tenminste twee van

de drie punten van iedere driehoek (het liefst in drie) de theodoliet worden opgesteld van waaruit hoekmetingen werden uitgevoerd. Dit stelde hoge eisen aan de voorverkenning van de metingen en leidde tot een intensief meetproces. Met de nieuwe apparatuur kon men iedere driehoeksconfiguratie vastleggen door in één van de drie punten een volledige Π-grootheid te meten, dus een hoek en een lengteverhouding.

Door ketens van dergelijke opstelpunten te vormen, ontstonden veelhoeken. Op basis van zijn eerdere analyses kwam Baarda tot de overtuiging dat men verdichtingsnetten zo moest meten, dat men die zelfstandig, d.w.z. zonder aansluiting op bekende punten, door kon rekenen en de sterkte ervan kon analyseren. Dit laatste betekent, zoals hierna uitgelegd wordt, dat men kan vaststellen of er meetfouten zijn gemaakt en dat de precisie van de nieuw ingemeten punten kan worden ingeschat in de vorm van de berekende covariantiematrix van de coördinaten.

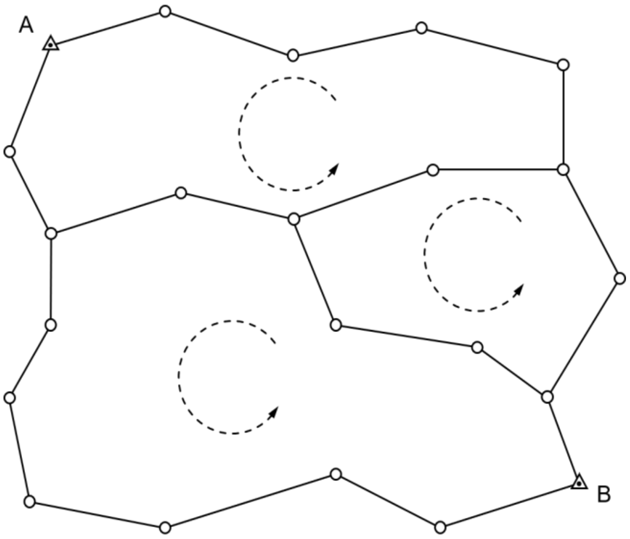


Fig. 9: Kringnetten

Dit leidde zo rond 1961–62 al tot het inzicht dat het beter was om landmeetkundige netwerken op te bouwen uit in zichzelf gesloten kringen van veelhoeken, de zogenaamde kringnetten, zie *Fig. 9*. Uit de persoonlijke herinneringen in (Kruif 2019) blijkt, dat in het zomerveldwerk van studenten in 1961 en 1962 eerste ervaringen werden opgedaan met deze meetopzet. Daaruit bleek dat deze kringnetten, gemeten met het toen moderne instrumentarium, net zo goed van kwaliteit waren, of zelfs beter, dan de vroegere driehoeksnetten. Bovendien waren er niet alleen minder opstelpunten nodig, omdat niet langer volledige driehoeken gemeten hoefden te worden, maar men kon ook met minder dichte puntenvelden volstaan, zodat men veel minder vrije zichtlijnen hoefde te zoeken. Hierdoor konden de metingen sneller en goedkoper worden uitgevoerd. Een aanzienlijke winst voor de praktijk.

Deze methodiek werd uitgewerkt in een serie lijvige collegedictaten (Baarda 1969). Hierin werd een aantal basisconfiguraties behandeld, waarbij voor iedere configuratie de voorwaardenvergelijkingen werden opgesteld voor vereffening via het Eerste Standaardvraagstuk. Dit alles werd beschreven in complexe getallen. Baarda hechtte aan deze formulering om analytische redenen. Deze formulering gaf goed inzicht in de mogelijkheden om fouten in de metingen of in de aansluitpunten op te sporen. Later zou Quee hierop terugkomen bij zijn onderzoek naar de structuur van driedimensionale netwerken. Hij geeft een aantal redenen waarom een analyse, gebaseerd op het Eerste Standaardvraagstuk, tot beter inzicht

leidt in het functionele model, vanwege de expliciete eliminatie van onbekenden. Die kunnen namelijk bij formulering van het Tweede Standaardvraagstuk verborgen blijven in het model (Quee 1983).

Vanuit praktisch oogpunt was het echter handiger om bij de verwerking van de waarnemingen uit te gaan van het Tweede Standaardvraagstuk (annex 2) omdat de waarnemingsvergelijkingen een tamelijk eenvoudige structuur hebben, waarbij de waarnemingen uitgedrukt worden als functies van de onbekende coördinaten. Hierdoor hoefde de software niet telkens aangepast te worden aan de gemeten netwerkstructuur, hetgeen bij het opstellen van voorwaardenvergelijkingen wel het geval was. Bovendien moet bij toepassing van het Eerste Standaardvraagstuk er altijd voor gezorgd worden dat de opgestelde voorwaardenvergelijkingen lineair onafhankelijk zijn.

Al snel werd de apparatuur voor lengtemeting zo goed, dat vanuit de praktijk werd gesteld dat de schaalfactor over de hele meting van een netwerk wel constant was, zodat alleen een schaalfactor per instrument moest worden vastgesteld. Dit betekende dat men niet de lengte van iedere zijde telkens uit beide eindpunten moest meten. Iedere zijde hoefde dus maar één keer gemeten te worden, hetgeen het meetproces versnelde. Een gevolg was dat niet alle Π-grootheden in de kringnetten volledig werden gemeten. De opstelling van voorwaardenvergelijkingen werd hierdoor minder systematisch, terwijl de formulering van de waarnemingsvergelijkingen voor het Tweede Standaardvraagstuk eenvoudig aangepast kon worden.

Opmerking 1: Het bleek dat met de hierboven beschreven benadering voor de vereffening van meetresultaten, in de landmeetkundige praktijk kon worden volstaan met de formulering van het Eerste en Tweede Standaardvraagstuk. Daarmee verdwenen de overige drie standaardvraagstukken uit de collegedictaten. Volgens (Alberda 2005) bijlage II.b, heeft Baarda rond 1967 de term *Vereffeningstheorie* ingevoerd in plaats van de door Tienstra gehanteerde term *Waarnemingsrekening*.

Opmerking 2: Baarda had van Tienstra het gebruik van de Ricci-notatie overgenomen. Ondertussen had hij de matrixrekening leren kennen (Hoek 1982) en paste zijn notatie daarop aan. Daardoor ontstond een hybride notatie, een combinatie van Ricci- en matrixnotatie (indices en haakjes) waardoor zijn publicaties voor de niet ingevoerde lezer nogal ontoegankelijk werden. Dit heeft de verspreiding van zijn ideeën ernstig in de weg gestaan. Zie ook de opmerking hierover in (Alberda 2005) bijlage II.b.

4.6 De B-methode van toetsen

Hoofdstuk X van de HTW ‘56 gaf een eerste aanzet voor een methode om de resultaten van een berekening te controleren op het mogelijke voorkomen van fouten. Daarbij werd uitgegaan van de gewogen kwadratische som van de sluittermen van voorwaarden

$\underline{t}^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t}/b = \underline{\sigma}_t^2$.

Uit deze grootheid volgt een Fischer-verdeelde $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 = \underline{F}_{b,\infty}$ waarin σ^2 een op basis van ervaring aangenomen variantiefactor was, zodat men er vanuit ging dat $E\{\underline{\sigma}_t^2\} = \sigma^2$ of anders geformuleerd $E\{\underline{\sigma}_t^2 / \sigma^2\} = 1$. Dus $\underline{\sigma}_t^2$ is een goede schatter van de variantiefactor σ^2. Alle informatie voor het toetsen van vereffeningsresultaten is dus vervat in de sluittermen *t* van de voorwaardenvergelijkingen.

Eerder bij de behandeling in hoofdstuk X van de HTW ‘56 bleek al dat $\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v} = \underline{t}^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t}$. Dit betekent dat de correcties $\underline{v}$ dezelfde informatie bevatten als de sluittermen $\underline{t}$. Dus in het geval de vereffening geschiedt volgens het Tweede Standaardvraagstuk kan het toetsen ook

geschieden op basis van de kleinste kwadratencorrecties $\underline{v}$ (en dat geldt ook voor de standaardvraagstukken III, IV en V).

Deze bevindingen waren het uitgangspunt voor de ontwikkeling van een methode voor het opsporen van fouten in de oorspronkelijke gegevens. Deze methode kon dan volledig geformuleerd worden in de termen van de mathematische statistiek, zodat men daarmee de toen in de landmeetkunde gebruikelijke ad-hocmethodes achter zich kon laten. Zoals zou blijken, kon op basis van deze nieuwe benadering ook een inschatting gemaakt worden van de orde van grootte van fouten die daarmee opgespoord konden worden. Zo kreeg men een beeld van de betrouwbaarheid van de metingen.

4.6.1 De introductie van het begrip "grenswaarde" (Baarda en Alberda 1962)

Een eerste uitwerking van deze ideeën werd gepubliceerd in (Baarda en Alberda 1962). Dit artikel was voor een belangrijk deel een korte recapitulatie van (Tienstra 1956). Het begon met een uitgebreide introductie, waarin volgens de gedachtenlijnen van Van Dantzig werd getoond hoe mathematisch-statistische modellen gekoppeld werden aan het landmeetkundige meetproces. Daarbij werd vastgesteld dat de normale verdeling (Gausscurve) een goede beschrijving van het stochastische karakter van de waarnemingen is. Van daaruit werd aangetoond dat de resultaten, de gecorrigeerde waarnemingen X, van een kleinste-kwadratenvereffening zogenaamde *Beste Lineaire Zuivere Schatters* (*Best Linear Unbiased Estimators*, *BLUE*) waren van de gezochte verwachtingswaarden $E\{x\}$. Verder werd nog een keer getoond dat een vereffening ook in meerdere fasen kan worden uitgevoerd en dat dat dezelfde resultaten geeft als een vereffening in één stap.

De introductie van ∇-grootheden

Dan volgt een behandeling van het toetsen van hypothesen in paragraaf 5. De nulhypothese H_0 is daarbij de veronderstelling dat de waarnemingen en gegeven coördinaten niet verstoord zijn, dus $E\{x\} = \mu_x$, zodat voor de sluittermen van de voorwaardenvergelijkingen geldt dat $E\{t\} = 0$. Een alternatieve hypothese H_a veronderstelt dan dat een of meerdere waarnemingen verstoord zijn. Deze wordt aangeduid met:

$H_a : E\{\underline{x}\} = \mu_x + \nabla x$ en $E\{\underline{t}\} = 0 + \nabla t = \nabla t$

Hier wordt voor het eerst het symbool "Nabla" ∇ ingevoerd om een verschuiving in verwachtingswaarden aan te duiden. Alternatieve hypotheses kunnen op vele manieren geformuleerd worden, maar een speciale groep is interessant omdat daarbij per waarneming x_i een fout verondersteld wordt:

$H_{ai} : E\{\underline{x_i}\} = \mu_{xi} + \nabla x_i$ zodat $E\{\underline{t}\} = 0 + \nabla_i t = \nabla_i t$

Deze groep van alternatieve hypothese vormt, zoals we hieronder zullen zien, het uitgangspunt voor de toetsing van individuele waarnemingen en de berekening van het effect van niet gevonden fouten op de berekende coördinaten.

Het onderscheidend vermogen van de toets en het begrip "grenswaarde"

Als er b overtallige waarnemingen zijn kunnen er b onderling onafhankelijke voorwaardenvergelijkingen worden opgesteld. Men noemt b het aantal vrijheidsgraden. Het effect van een verstoring ∇x op de schatting van de bovengenoemde schatter van de variantie is dan:

$E\{ \underline{\sigma}_t^2 / \sigma^2\} = 1 + \lambda/b$ waarin altijd geldt dat $\lambda \geq 0$

In de HTW '56 was al aangetoond dat onder H_0 geldt dat $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2$ een Fisher-verdeelde grootheid is, dus: $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 = \underline{F}_{b,\infty}$. Dit geeft de mogelijkheid om te toetsen of $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2$ niet te veel van de waarde 1 afwijkt, dus dat $\underline{\sigma}_t^2$ niet te veel van σ^2 afwijkt. Dat zou kunnen wijzen op een verstoring in een of meerdere waarnemingen. De toets gaat dan als volgt:

1. Kies een waarde α en bereken de waarde $F_{1-\alpha;b,\infty}$ = C, hierin geeft α de kans aan dat de toets ten onrechte tot verwerping leidt.
2. Dan geldt dat als er geen verstoring is, dus onder H_0: $P(\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 > C| H_0) < \alpha$ Dus dan is de kans dat $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 > C$ kleiner is dan de voor α gekozen waarde.
3. In de praktijk wordt gekozen voor α = 0.05 of α = 0.001, deze waarde wordt de onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets genoemd

Als nu H_0 niet geldt, maar er geldt een alternatieve hypothese H_{a_i}, dan wordt er een verstoring in een waarneming x_i verondersteld. Dan geldt $E\{\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2\} = 1 + \lambda/b$. Dit geeft een verschuiving in de Fisherverdeling. De vraag is nu hoe groot deze verschuiving moet zijn, dus hoe groot moet λ zijn, zodat geldt dat $P(\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 > C/ H_{a_i}) > \beta$, zodat de kans dat de verstoring wordt opgemerkt groter is dan β. In de praktijk wordt vaak gekozen voor β = 0.80, oftewel er is een kans van 80% of groter dat een fout gedetecteerd wordt. Als λ_β nu de waarde heeft waarvoor dat geldt, dan geeft de combinatie (λ_β, β) de betrouwbaarheid van de toets aan.

Het bovenstaande is stof die men in leerboeken over de mathematische statistiek kan vinden. Baarda verwees naar (een eerdere versie van) (Cramer 1957). In (Baarda en Alberda 1962) werd deze kennis nu geïnterpreteerd in het kader van de verwerking van geodetische metingen. Hierbij werden twee belangrijke aanvullingen gegeven:

1. Bij iedere alternatieve hypothese H_{a_i}, dus voor iedere waarneming x_i waarvoor een toets wordt uitgevoerd, kan men de waarde voor $\nabla_\beta x_i$ berekenen die leidt tot een waarde voor λ_β zodat $P(\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 > C/ H_{a_i}) = \beta$. Voor deze waarde van $\nabla_\beta x_i$ werd het begrip *boundary value* ("grenswaarde") ingevoerd.
2. Verder werd uitgelegd hoe deze toets werkt bij een vereffening in fasen. Er worden drie fases voorgesteld:
   a. De middeling van herhaalde metingen (hoeken en lengteverhoudingen) per opstelpunt, de stationsvereffening.
   b. Het vereffenen van een nieuw gemeten netwerk, onafhankelijk van de gegeven aansluitpunten. Hierdoor kunnen de nieuwe metingen zelfstandig getoetst worden op mogelijke meetfouten.
   c. De aansluiting van het nieuwe netwerk op gegeven punten. Hierdoor kunnen de gegeven punten onderzocht worden op mogelijke verstoringen.

   Uiteraard kan het aantal fasen uitgebreid worden voor iedere nieuwe uitbreiding van het nieuwe netwerk, dat wil zeggen dat iedere verdichtingsfase van een puntenveld telkens apart kan worden aangesloten op reeds eerder gerealiseerde gedeeltes.

Met name de scheiding van de fasen b en c vormt een belangrijke stap in de richting van het begrip *Schrankingsstelsel* dat niet lang meer op zich liet wachten.

De betrouwbaarheid van een netwerk (Baarda 1967)

De hierboven genoemde ideeën werden verder uitgewerkt in (Baarda 1967) en (Baarda, 1968). Allereerst werd in (Baarda 1967) – oorspronkelijk gepresenteerd als een paper op een conferentie in Brussel in 1966 – uitgelegd dat vereffening via het eerste en het tweede standaardvraagstuk identieke resultaten geeft. Dat betekent dat waar Baarda zijn analyses bij voorkeur via het formalisme van het Eerste Standaardvraagstuk uitwerkt, de resultaten ook voor de uitkomsten van het Tweede Standaardvraagstuk gelden. Hij legt vervolgens uit hoe de Fishertoets bij een vereffening in fasen werkt en wat dat betekent voor de keuze van kritieke gebieden van de toets (keuze van α). Dan laat hij zien wat het effect van een fout in de waarnemingen is op de resultaten van een vereffening en op de Fishertoets als zo'n fout niet ontdekt wordt. Bovendien laat hij zien wat de invloed is op aan de waarnemingen $\underline{x}$

gecorreleerde grootheden. Die introduceert hij als $\underline{X}^R$-grootheden (afgeleide grootheden). In wezen gaat het hier om twee soorten grootheden:

1. De coördinaten van bekende punten die geen aansluitpunten zijn, maar wel aan de aansluitpunten gecorreleerd zijn.
2. De meetresultaten die in een eerdere fase vereffend zijn en gecorreleerd zijn aan de invoergegevens in een volgende fase.

Hier verschijnen verschillende soorten ∇-grootheden, maar de term *grenswaarde* (*boundary value*) valt niet.

Verder wordt ingegaan op de situatie dat de oorspronkelijke covariantiematrix van de gegevens niet beschikbaar is en in plaats daarvan een vervangingsmatrix wordt gebruikt. Dit onderwerp zullen we later nog tegenkomen.

Daarnaast volgt een analyse van de eisen die deze benadering stelt aan de formulering van een wiskundig functioneel model voor de waarnemingsgrootheden. Op grond daarvan komt Baarda tot de conclusie dat het geodetische meetproces lengteverhoudingen en hoeken geeft als schatbare grootheden. Die dienen daarom centraal te staan bij de opstelling van voorwaardenvergelijkingen of waarnemingsvergelijkingen voor een vereffening via respectievelijk het Eerste en Tweede Standaardvraagstuk. Dit zagen we ook al in de laatste paragraaf van Sectie 4.3.

4.6.2 Data Snooping en de B-methode van toetsen (Baarda 1968)

In 1965 werd Baarda President van *Special Study Group 1.14* van de *IAG*. In die hoedanigheid bereidt hij een bijeenkomst van de IAG in 1967 voor met een wel zeer uitgebreid rapport dat uiteindelijk gepubliceerd wordt als (Baarda 1968). Hoewel hij dit rapport als voorzitter van de studiegroep presenteert lijkt toch dat de inhoud vooral zijn eigen werk is. Nergens blijkt dat anderen hebben bijgedragen. Er wordt wel verwezen naar het werk van anderen. Deze publicatie begint met een geometrische interpretatie van een vereffening volgens het Eerste Standaardvraagstuk, zie annex 1 en 3. Dit is dus een vereffening met voorwaardenvergelijkingen.

$\underline{t} = U \cdot \underline{x}$ met $E\{\underline{t}\} = 0$

Hierin is $\underline{x}$ een vector met m elementen in een m-dimensionale ruimte, noem dit de x-ruimte, zie *Fig 10*. Ieder van de m waarnemingsgrootheden in een geodetisch netwerk specificeert dus een dimensie van deze ruimte en heeft een eigen as in het m-dimensionale assenstelsel. Daar er $b << m$ voorwaarden zijn, is de vector $\underline{t}$ gelegen in een b-dimensionale deelruimte, noem dit de t-ruimte. De berekende kleinste-kwadratencorrecties voor de waarnemingen $\underline{x}$ vormen dan een vector met m elementen $\underline{v} = B \cdot \underline{t}$ (zie annex 1). Omdat $\underline{v}$ alleen op basis van $\underline{t}$ berekend wordt, ligt deze dan ook geheel in de t-ruimte. Dit is in overeenstemming met de eerdere vaststelling dat $\underline{t}$ en $\underline{v}$ dezelfde informatie bevatten.

Baarda voert nu de *conventionele groep van alternatieve hypothesen* in en die houdt in dat er telkens in één van de waarnemingsgrootheden x_i een fout wordt verondersteld. Dit sluit aan bij de boven genoemde bevindingen in (Baarda en Alberda 1962). Dit betekent dus dat in de x-ruimte een foute waarde langs de overeenkomstige as van x_i wordt verondersteld. *Fig. 10* toont het effect op de vector van sluittermen $\underline{t}$. In deze figuur is een tweedimensionale t-ruimte weergegeven met daarin de projectie van de x_i-as op deze ruimte, de richting daarvan wordt bepaald door kolom i van de matrix U.

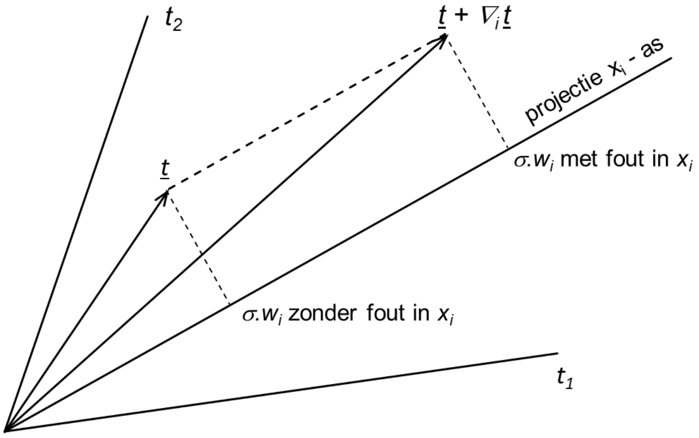


Fig. 10: de geometrische weergave van de specificatie van toetsgrootheden $\underline{w}_i$

Een fout in waarneming x_i geeft de vector $\underline{t} + \nabla_i t$. De verschuiving $\nabla_i t$ is parallel aan de geprojecteerde x_i-as. Als we $\underline{t}$ orthogonaal projecteren op de geprojecteerde x_i-as, dan krijgen we de grootheid $\sigma.\underline{w}_i$, hier wordt σ als schalingsfactor gebruikt. Het blijkt nu dat het effect van de fout in de waarneming x_i volledig overeenkomt met het verschil tussen de waarden van w_i met en zonder de invloed van die fout. Deze *w*-grootheid is het uitgangspunt voor het toetsen van alle individuele waarnemingsgrootheden. Die procedure wordt *Data Snooping* genoemd (zie annex 6).

De methodiek die wordt voorgesteld is dat na een vereffening eerst wordt getoetst:

$\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 < F_{1-\alpha;\, b,\, \infty}$

b is het aantal voorwaardenvergelijkingen en voor α moet een geschikte waarde gekozen worden afgestemd op *b.* Als deze toets tot verwerping leidt, wat meestal het geval is, gaat men over tot Data Snooping. Baarda noemde dit de B-methode van toetsen, de vraag was altijd waar deze benaming vandaan kwam. In (Alberda 2005) bijlage II.b, werd deze vraag opgehelderd bij de bespreking van (Baarda 1968):

> *... Zoals gewoonlijk had Baarda een uitvoerige studie van de internationale literatuur gemaakt. Hij geeft ook enkele citaten uit een boek van de bekende Amerikaanse statisticus R. L. Ackoff onder andere over meer dimensionale toetsen volgens een methode die hij de A-methode noemde. Vergenoegd lachend zei Baarda: "Dan noemen we onze manier de B-methode!".*

Opmerking: Voor de in annex 3 beschreven toets $\underline{w}_i^2 < F_{1-\alpha_0;\, 1,\, \infty}$ kan aangetoond worden dat het een *beste toets* (*most powerful test* in (Cramer, 1957), *best test* in o.a. (Hogg and Craig 1970)) is voor het toetsen van H_0 (geen fouten in de waarneming $\underline{x}_i$) tegen H_{a_i} (wel een fout in de waarneming). Dat betekent dat er geen gevoeligere toets gevonden kan worden. Deze term gebruikt Baarde niet, terwijl dat toch een essentieel argument is om deze procedure voor te stellen als protocol bij het verwerken van gegevens in de praktijk. Hij moet wel geweten hebben dat dit een optimale toets is. Hij kende een eerdere uitgave van (Cramer, 1957) en volgens Alberda had hij zich breed ingelezen in de literatuur. Mijn vermoeden is dat het hem via de geometrische interpretatie van het vereffeningsvraagstuk, zoals in *Fig. 10*, duidelijk is geworden dat dit een beste toets was. Dat blijkt uit de illustraties in zijn publicaties en uit de manier waarop hij de stof op college behandelde. Daar lichtte hij de algoritmes toe met illustraties als in annex 6.

4.6.3 *De inwendige en uitwendige betrouwbaarheid van netwerken*

In aanvulling op de voorgestelde toetsprocedure wordt nu ook het nieuwe begrip *betrouwbaarheid van geodetische netwerken* geïntroduceerd (Baarda 1968, HS 11). Voor iedere w_i-toets wordt de bijbehorende grootheid ∇x_i berekend. Deze waarden geven gezamenlijk dan een beeld van de *interne betrouwbaarheid* van een netwerk. Het gaat dus om de orde van grootte van waarnemingsfouten, die in een netwerk kunnen worden gevonden. Daarnaast wordt voor iedere ∇x_i berekend wat het effect (∇X, ∇Y) is op de coördinaten van de nieuwe punten. Dit wordt de *externe betrouwbaarheid* van een netwerk genoemd. Die geeft dus aan wat de mogelijke verstoring in berekende coördinaten is als de toets gefaald heeft. Dit is van belang voor het gebruik van deze gegevens bij uitbreiding van het puntenveld door aansluitende metingen. In (Baarda 1968) wordt voor de ∇-waarden het begrip *lower bound* voor het fout opsporend vermogen van de toetsen gebruikt, maar het begrip *grenswaarde* of *boundary value* wordt hier niet genoemd.

Data Snooping en de bijbehorende betrouwbaarheidsanalyses worden in (Baarda 1968) verder uitgewerkt voor een vereffening in meerdere fases. Dat was zeker van belang voor de landmeetkundige praktijk, maar voor het begrip is een uitleg voor een vereffening in één fase voldoende.

4.6.4. *Het toetsen van het functionele model*

Baarda formuleerde de methodiek van Data Snooping als de toets van een specifieke groep van alternatieve hypotheses, waarbij telkens een verschuiving in de verwachtingswaarde van een van de waarnemingen werd verondersteld. Hiervoor ging hij echter uit van een algemenere formulering waarmee ook andere hypotheses geformuleerd kunnen worden. In (Baarda 1968) voerde hij in de formules een C-vector in waarmee aangegeven kan worden hoe de verschillende waarnemingen betrokken zijn bij een alternatieve hypothese, zie annex 6. Voor Data Snooping heeft in deze C-vector alleen het element dat op de te toetsen waarneming betrekking heeft een waarde één (1), alle andere waarden zijn nul. Zo kan men alle waarnemingen aflopen.

Andere alternatieve hypotheses, dus andere toetsen op het functioneel model worden dan gerepresenteerd door andere specificaties van deze C-vector. Baarda dacht hierbij zelf vooral aan het toetsen van verstoringen van de coördinaten van aansluitpunten. Dit moest dan geschieden nadat nieuwe metingen in een eerste fase als vrij netwerk, dus zonder aansluitpunten, vereffend waren. Het vrije netwerk kon dan in tweede fase op gegeven punten worden aangesloten. Omdat de waarnemingen bij de vereffening in eerste fase al waren getoetst kon men aannemen dat problemen in tweede fase werden veroorzaakt door fouten in de aansluitpunten. Het kon zijn dat individuele punten waren verstoord, maar het kon ook zijn dat er een vervorming was opgetreden in het hele veld van aansluitpunten, of in een deel daarvan. Zijn methode gaf nu de mogelijkheid om daar gericht naar te zoeken door relevante alternatieve hypotheses te formuleren.

4.7 S-transformaties, criterium- en vervangingsmatrices

4.7.1 *Schrankingsstelsels*

Hierboven is al beschreven hoe Baarda aan het begin van zijn loopbaan de opdracht kreeg om een meetkundige grondslag te leggen in de nieuw ontgonnen Noordoostpolder en dat die ervaring de aanzet gaf tot zijn latere werk. In (Baarda 2002) bijlage II.a, vinden we de volgende passage:

> *In de oorlogsjaren trachtte een naaste leerling van Tienstra diens ideeën in praktijk te brengen. Maar de gemeten regio's bleken groter te zijn dan Tienstra voor ogen stond, zodat de*

theorie verfijnd moest worden. Bovendien week het patroon van de geconstateerde coördinaatverschillen in de aansluitingspunten van veelhoeken af van het verwachte patroon volgens bovenstaande doelstelling, zodat controle op vergissingen bij de meting bemoeilijkt werd. Uiteindelijk werd de oplossing gevonden door de definitie van het begrip coördinaat te wijzigen. Numeriek bleef de waarde onaangetast, maar de stochastische (kanstheoretische) invloed van absolute ligging, lengteschaal en oriëntering op de meetkundige grondslag in een regio werd geëlimineerd; kortom stochastisch gezien telde alleen de vorm. Het duurde jaren voordat deze zogeheten 'schrankingscoördinaten' werkelijk begrepen werden, de HTW 1956 hinkte daarom ook nog op twee gedachten.

Dit is een wat wonderlijke formulering, want die leerling was Baarda zelf; een soort vreemde bescheidenheid? In wezen toont het bovenstaande citaat aan dat het concept van schrankingsstelsels, (kortweg *S-stelsels*) daar werd geboren. In het eerste hoofdstuk van (Baarda 1973) beschrijft hij deze vroege wortels van zijn latere werk in het kort.

In 1946 wordt hij benoemd tot lector in "het Landmeten, het Waterpassen en de Geodesie" bij de afdeling der Weg- en Waterbouwkunde van de TH Delft.

Zijn bevindingen in de Noordoostpolder werkt hij uit in zijn openbare les (Baarda 1947). Hij behandelt twee hoofdthema's: de definitie van coördinatenstelsels en de beoordeling van de kwaliteit van berekende coördinaten. Hier legt hij uit dat landmeters in feite lengteverhoudingen en hoeken tussen drietallen van punten vastleggen en dat coördinaten pas berekend kunnen worden door de coördinaten van een punt in te voeren, met een oriëntatie van een zijde naar een ander punt en een schaalfactor voor de gemeten afstanden. Maar eenvoudiger is het om de coördinaten voor twee punten als uitgangspunt voor de berekening te kiezen en deze als foutloos in de berekening in te voeren. Daar kiest hij uit praktische overwegingen dan ook voor. Hij noemt zo'n gekozen puntenpaar dan *S-basis* en de daaruit berekende punten een *S-stelsel* of *S-system.* Een netwerk wordt dus aan deze twee punten opgehangen, hij noemt dat de *schranking* van een netwerk. In het verdere betoog legt hij uit dat de kwaliteit van coördinaten dan beschreven wordt door de berekende standaardellipsen van punten, de relatieve standaardellipsen tussen puntenparen én de schranking van het netwerk. Daarmee heeft hij dus de basis gelegd voor de theorie van S-transformaties en criteriummatrices. In 1966 beschrijft hij zijn ideeën in een interne publicatie (Baarda 1966). Pas later in 1973 wordt de theorie echt gepubliceerd (Baarda 1973).

Hierboven zagen we dat in de HTW '56 Hoofdstuk II al eerste aanwijzingen in deze richting te vinden waren. In (Baarda 1960) behandelt hij de betekenis van de berekende varianties van coördinaten en in (Baarda 1966) laat hij zien hoe de schranking van coördinaten van de ene S-basis naar een andere getransformeerd kan worden. Hij schrijft de formules in complexe getallen. Ze vertonen sterke verwantschap met de formules die we eerder tegenkwamen in eerdergenoemde publicaties van Tienstra en Baarda zelf. Het betreft hier twee interne publicaties.

Overigens vinden we dit principe ook al in leerboeken als (Schermerhorn en Van Steenis, 1964, hoofdstukken III en XIV). Daarin wordt beschreven hoe standaardellipsen voor nieuw ingemeten punten, als bij een voorwaartse insnijding, altijd berekend moeten worden ten opzichte van een rekenbasis. Dit houdt in dat hun betekenis voor de aanduiding van de nauwkeurigheid van punten door middel van deze ellipsen altijd relatief is ten opzichte van zo'n basis. Verder was er vlak voor de publicatie van (Baarda 1973) ook al een publicatie verschenen in de USA van Allan Pope (Pope 1971) waarin deze materie ook wordt behandeld. Het is niet duidelijk of Baarda daarvan op de hoogte was, hij verwijst hier niet naar.

4.7.2. Onderscheid tussen precisie en betrouwbaarheid

(Baarda 1968) is de eerste echte publicatie waarin hij een korte opmerking maakt over het feit dat standaardellipsen afhankelijk zijn van de rekenbasis van een netwerk, zie *Fig. 11*. In die figuur wordt uit de covariantiematrix van de vereffende waarnemingen tweemaal een covariantiematrix van de coördinaten berekend. De eerste berekening gaat uit van de basispunten 1 en 3, de tweede berekening gaat uit van de punten 69 en 71. Het is duidelijk te zien dat dit tot verschillende punt- en relatieve standaardellipsen voor de overige punten leidt en dus tot verschillende covariantiematrices voor deze punten. Hij noemt hier echter nog niet het begrip S-stelsel.

Hij splitst voortaan het begrip *nauwkeurigheid* in de begrippen *precisie* en *betrouwbaarheid.* De precisie van een puntenveld wordt door de covariantiematrix van de coördinaten uitgedrukt, de betrouwbaarheid door de grenswaarden. Hij toont in een voorbeeld aan dat de inwendige betrouwbaarheid van een netwerk, uitgedrukt in de grenswaarden van de vereffende waarnemingen, niet direct gerelateerd is aan de precisie (gevisualiseerd door de punt- en relatieve standaardellipsen) van de berekende coördinaten. Dat komt doordat de inwendige betrouwbaarheid onafhankelijk is van de gekozen S-basis. De uitwendige betrouwbaarheid is daar echter wel afhankelijk van. Dit onderscheid tussen precisie en betrouwbaarheid was toen nieuw in de geodesie.

4.7.3. Schrankingstransformaties (S-transformaties)

Als er nu twee naburige puntenvelden zijn die men wil samenvoegen, dan zullen die over het algemeen in twee verschillende S-stelsels berekend zijn. Men zoekt dan de gemeenschappelijke punten op. Twee daarvan kunnen als S-basis ingevoerd worden voor het samengevoegde puntenveld. Dat betekent dat beide puntenvelden van hun oorspronkelijke S-basis omgerekend moeten worden naar deze nieuwe gemeenschappelijke basis. In (Baarda 1966) worden de ideeën uitgewerkt en later wordt in (Baarda 1973) het concept van S-transformaties gepubliceerd.

Hij formuleerde de S-transformatie in complexe getallen. We zullen hier de notatie van paragraaf 4.4.1 volgen. De positie van een punt *i* wordt dus weergegeven door het complexe getal z_i . Het concept van S-stelsels is voornamelijk ontwikkeld om het stochastische karakter van de berekende coördinaten te beschrijven. Dat wil zeggen dat de nauwkeurigheid van de coördinaten ten opzichte van een S-basis moet worden uitgedrukt, zie *Fig. 11*. De redenering is dan als volgt. We gaan ervan uit dat de twee naburige puntenvelden in hetzelfde coördinatensysteem beschreven zijn, bijvoorbeeld het Nederlandse RD-stelsel. Laat nu het ene stelsel berekend zijn ten opzichte van S-basispunten *p* en *q*, dat geeft dan voor een punt *i* de positie $z_i^{p,q}$.

Voor een punt *j* in het andere veld, berekend ten opzichte van de S-basispunten *u* en *v* krijgen we evenzo de positie $z_j^{u,v}$. Als nu beide stelsels in hetzelfde coördinatensysteem zijn berekend, vinden we voor gemeenschappelijke punten *i* in de twee velden dat $\underline{z}_i^{p,q} = \underline{z}_i^{u,v}$. De feitelijke waarden van de coördinaten van de gemeenschappelijke punten zijn hetzelfde en hoeven dus niet omgerekend te worden. Er kunnen echter kleine verschillen Δz tussen deze rekenwaarden en de verwachtingswaarden van de coördinaten voorkomen. Daardoor verschillen de stochastische kenmerken tussen de beide S-stelsels zoals uitgedrukt in de covariantiematrices, als in *Fig. 11*.

$E\{\underline{z}_i^{p,q}\} \neq E\{\underline{z}_i^{u,v}\}$

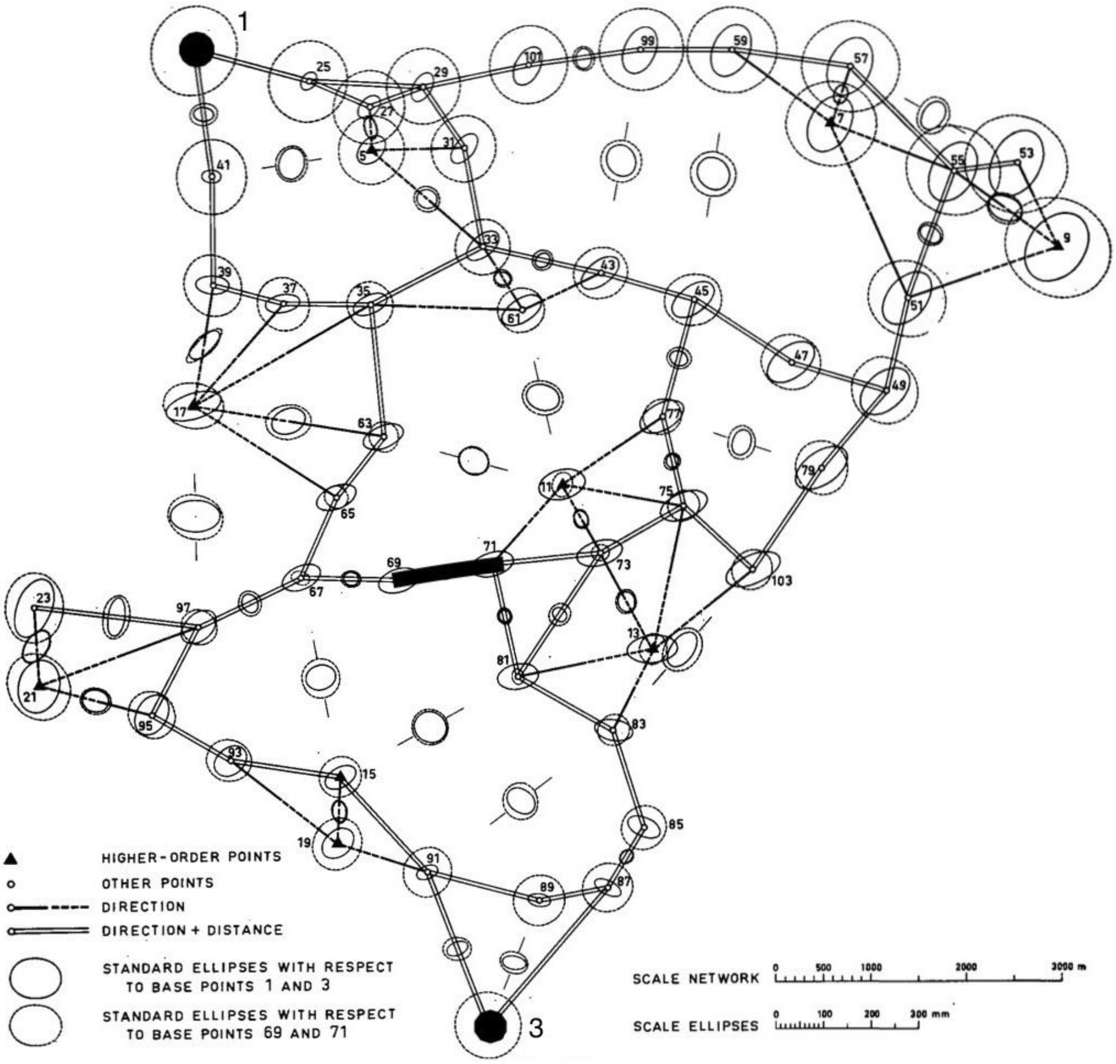


Fig. 11: Standaardellipsen afhankelijk van S-basis (Baarda, 1968, p.90)

Er geldt dan dat als twee gemeenschappelijke punten *r* en *s* als nieuwe S-basis voor het samenvoegen van de twee velden gekozen worden, dan moeten het oude *(p, q)* stelsel en het oude *(u, v)* stelsel naar het nieuwe *(r, s)* stelsel getransformeerd worden. In de opzet die hier gekozen is, gaat het om de transformatie van relatief kleine differentiegrootheden Δz. De formules voor deze transformatie leidt Baarda af van de eerste orde Lagrangepolynomen die hij ook al in (Baarda, 1957) gebruikte. Kort samengevat krijgt de transformatie van een oud stelsel naar een nieuw *(r, s)* stelsel de vorm:

$$\Delta \underline{z}_i^{\,r,s} = S^{r.s} \cdot \Delta \underline{z}_i^{\,p,q}$$

De indices van de transformatie *S* verwijzen alleen naar het nieuwe stelsel, omdat het er eigenlijk niet toe doet wat het oude stelsel was, zolang het aan de beschrijving hierboven voldoet. Baarda verwees dan ook vaak in het algemeen naar het oude stelsel met de index *a* als het niet gespecificeerd was. Men hoeft dus niet precies te weten wat de basis van een oud stelsel was om het te kunnen transformeren naar een nieuwe wél gespecificeerde basis. Dit is van belang bij het omrekenen van de covariantiematrices van bestaande puntenvelden naar een nieuw S-stelsel. Stel dat coördinaten beschreven zijn in een onbekend S-stelsel en laten we ze aanduiden met $\Delta \underline{z}_i^{\,a}$. Hun covariantiematrix is dan $\sigma_{zz}^{\,a}$. Als we deze coördinaten omrekenen naar een *(r,s)* stelsel met:

$\Delta \underline{z}_i^{\,r,s} = S^{r.s} \cdot \Delta \underline{z}_i^{\,a}$ dan volgt uit de voortplantingswetten dat $\sigma_{zz}^{\,r,s} = S^{r.s} \cdot \sigma_{zz}^{\,a} \cdot S^{r.s\,\mathrm{T}}$

$S^{r.s\,\mathrm{T}}$ is de getransponeerde van $S^{r.s}$

Hiermee is dan de covariantiematrix van de coördinaten in het nieuwe *(r, s)* stelsel berekend.

4.7.4 Criteriummatrices

De voorgeschiedenis

Om begrip te krijgen voor het ontstaan van de theorie van criteriummatrices en de rol die S-stelsels daarbij spelen, is het goed om nog even kort een aantal bevindingen uit het voorgaande samen te vatten.

We zagen dat in (Tienstra 1931) en (Tienstra 1933) al werd aangegeven dat cirkelvormige puntstandaardellipsen als ideaal beschouwd werden, omdat er daarbij geen richtingsvoorkeur is ten aanzien van de precisie van aangemeten punten. Dat betekent dat wanneer deze punten als aansluitpunten voor nieuwe metingen worden gebruikt het niet uitmaakt vanuit welke richting ze aangemeten worden. In diezelfde trant wenste men ook dat de grootte van de puntstandaardellipsen onafhankelijk was van de positie van de punten, zodat het voor de precisie ook niet uitmaakte waar ze lagen bij aanmeting voor de uitbreiding of verdichting van puntenvelden. Het bleek al snel dat het praktisch ondoenlijk was om cirkelvormige standaardellipsen te realiseren.

In de HTW '38 werden verkenningseisen dan ook anders geformuleerd (paragraaf 3.3 hierboven). Er werd niet langer een ideale precisie nagestreefd. In plaats hiervan werd een criterium geformuleerd voor het gemiddelde van het kwadraat van de lange assen van de gerealiseerde standaardellipsen voor puntenvelden van niet te geringe omvang. Dat gemiddelde mocht niet groter zijn dan een bepaalde waarde. Die waarde werd gespecificeerd voor drie terreintypen. De ervaringen van Baarda in zijn tijd als praktiserend landmeter in de vroege jaren '40 leidden tot drie bevindingen:

1. Het bleek praktisch niet doenlijk om metingen zo uit te voeren, dat aan de eis voor het gemiddelde kwadraat van de lange assen van de puntstandaardellipsen voldaan kan worden. Het is beter om een criterium te formuleren als ondergrens voor de te bereiken precisie.
2. Bij de formulering van zo'n criterium moet men niet alleen letten op de precisie van de ingemeten punten. Minstens zo belangrijk is de relatieve precisie van puntenparen. Dit is van belang omdat nieuwe metingen altijd aansluiten op meerdere punten zodat de relatieve precisie van deze punten eigenlijk een belangrijkere rol speelt dan hun "absolute" precisie uitgedrukt in de puntstandaardellipsen.
3. Bij punt 2 is het woord absoluut tussen aanhalingstekens gezet omdat het Baarda duidelijk was geworden dat de precisie van puntenvelden altijd berekend wordt ten opzichte van een rekenbasis in de vorm van twee punten waarvoor coördinaten worden aangenomen. Het gaat hier dus om een S-basis waarvan de coördinaten niet stochastisch zijn.

De HTW '38 hield al rekening met punt 1 bij de formulering van verkenningseisen. Daarnaast vormde punt 2 ook de basis voor de formulering van die eisen in de HTW '56. Punt 3 werd nog niet in beschouwing genomen. Zolang de verkenningseisen uitgaan van alleen puntstandaardellipsen en relatieve standaardellipsen is het niet duidelijk hoe men rekening kan houden met een S-basis. Waarschijnlijk is het daarom dat het derde punt toen nog geen rol speelde. Maar Baarda heeft zelf later regelmatig aangegeven dat hij niet tevreden was over de wijze waarop verkenningsregels in de HTW '56 waren geformuleerd. Het was een

halfslachtige benadering die om verbetering vroeg. In (Baarda 1973) kwam hij voor het eerst naar buiten met een consistente en meer bevredigende benadering.

Het zoeken naar een criteriummatrix

De sinds de jaren '40 verbeterde inzichten in de correcte toepassing van de kleinste-kwadratenmethode gaven een beter begrip hoe naast een schatting van de onbekenden ook de covariantiematrix van deze onbekenden kon worden berekend. In de landmeetkundige toepassing van deze methode vormden de coördinaten van de ingemeten punten de onbekenden. Dit betekende dat men ook hun volledige covariantiematrix kon berekenen. Vanaf de jaren '60 kwamen, door de snelle ontwikkeling van de computertechnologie, snel betere rekenfaciliteiten ter beschikking. Hierdoor konden deze omvangrijke berekeningen nu ook daadwerkelijk uitgevoerd worden.

Deze nieuwe situatie gaf de mogelijkheid om het idee van S-stelsels streng door te voeren. Men kon nu ook voor grotere netwerken de covariantiematrix van nieuwe coördinaten ten opzichte van een goed gespecificeerde S-basis berekenen, zoals in *Fig. 11*. De vraag was nu hoe men een criterium voor de precisie van die coördinaten moest formuleren. Dit criterium moet voor de hele covariantiematrix van de coördinaten gelden en niet alleen voor de coördinaten van individuele punten en/of voor de coördinatenverschillen tussen puntenparen. De vraag was dus in wezen hoe een criterium voor deze matrix geformuleerd moest worden, het zoeken was naar de structuur van een *criteriummatrix,* die zal worden aangeduid als H.

Uiteraard kan men uit de berekende covariantiematrix nog wel de puntstandaardellipsen en de relatieve standaardellipsen afleiden. Het was dan ook een redelijke eis dat men uit een criteriummatrix H voor punten en puntenparen cirkels kan afleiden die dan als bovengrens voor die standaardellipsen gelden. Maar dat is een onvolledig criterium. Het eigenlijke criterium moet voor de hele covariantiematrix gegeven worden. Bovendien is in een S-stelsel de grootte en oriëntering van de puntstandaardellipsen afhankelijk van de ligging van de punten ten opzichte van de S-basis, zie *Fig 11*. Verder worden de punten van de S-basis als niet stochastisch ingevoerd, zodat de uit de criteriummatrix afgeleide cirkels van die punten een straal = 0 moeten hebben. Deze twee eisen geven al aan dat H in hetzelfde S-stelsel berekend moet worden als de covariantiematrix van de coördinaten. Het is dus het zoeken naar een $H^{r,s}$.

In (Baarda 1973) wordt voor het eerst een oplossing gepubliceerd. Deze is in nauwe samenwerking met Baarda's medewerker ir. Jouke Alberda, ontwikkeld en eerder in een intern rapport (Baarda 1966) beschreven. De hoofdstukken van (Baarda 1973), waarin hij uiteindelijk tot de formulering van een criteriummatrix komt, geven een heftig gecijfer maar kortweg is de redenering ongeveer als volgt:

a. De covariantiematrix van de coördinaten in een S-stelsel is een directe functie van de covariantiematrix van de vormelementen, d.w.z. de Π–grootheden, van het puntenveld. Daarom moet een criterium voor de covariantiematrix afgeleid kunnen worden uit een criterium voor deze vormelementen.

b. De vroegere eis ten aanzien van cirkelvormige punt- en relatieve standaardellipsen waarvan de grootte onafhankelijk is van de ligging in het puntenveld moet daarom vertaald worden naar een eis voor de vormelementen. Het criterium voor de precisie van deze vormelementen moet onafhankelijk zijn van de ligging in het puntenveld. Dan kan dat criterium alleen afhankelijk zijn van de vorm en grootte van de driehoek waarin ze berekend zijn. En die vorm en grootte worden bepaald door de lengtes van de zijden van de driehoek.

c. In een driehoek met de punten 1, 2 en 3 worden voor de coördinaten de elementen van de criteriummatrix als volgt gedefinieerd (we gebruiken hier het symbool *h* in plaats van *σ*, verder is $i \neq j$ en $i, j = 1, 2, 3$):

$h_{x_i x_i} = h_{y_i y_i} = d^2$ <u>en</u> $h_{x_i y_i} = h_{y_i x_i} = 0$ <u>en</u>

$h_{x_i x_j} = h_{y_i y_j} = d^2 - d_{ij}^2$ <u>en</u> $h_{x_i y_j} = h_{y_i x_j} = h_{x_j y_i} = h_{y_j x_i} = 0$

Als nu $d_{ij}^2 = f(l_{ij})$, dus als d_{ij}^2 een functie van de zijdelengte is, dan is de precisie van de uit deze driehoek berekende vormelementen inderdaad alleen een functie van de lengte van de zijden en een gekozen constante d^2. Voor de in een punt *i* berekende α_i en $ln\ v_i$ geldt dan dat: $h_{\alpha_i,\alpha_i} = h_{ln\ v_i, ln\ v_i}$ <u>en</u> $h_{\alpha_i, ln\ v_i} = 0$. Baarda kiest op advies van Alberda de functie $d_{ij}^2 = c.\ l_{ij}$. Er zijn andere mogelijkheden maar voorwaarde is dat de gegenereerde matrix positief-definiet is.

	Δy_i	Δy_j	Δy_r	Δy_s	Δx_i	Δx_j	Δx_r	Δx_s
Δy_i	d^2	$(d^2 - d_{ij}^2)$	$(d^2 - d_{ir}^2)$	$(d^2 - d_{is}^2)$				
Δy_j	$(d^2 - d_{ji}^2)$	d^2	$(d^2 - d_{jr}^2)$	$(d^2 - d_{js}^2)$	0			
Δy_r	$(d^2 - d_{ri}^2)$	$(d^2 - d_{rj}^2)$	d^2	$(d^2 - d_{rs}^2)$				
Δy_s	$(d^2 - d_{si}^2)$	$(d^2 - d_{sj}^2)$	$(d^2 - d_{sr}^2)$	d^2				
Δx_i								
Δx_j	0				Zelfde deelmatrix als linksboven			
Δx_r								
Δx_s								

Fig.12: De structuur van criteriummatrix H^a

Op basis van deze gedachtegang kon een oplossing gevonden worden door voor alle punten in een netwerk een matrix H^a op te stellen in een niet gespecificeerd S-stelsel, zie *Fig. 12.* Die voldoet dan aan de eisen b en c. Deze matrix kan dan via een S-transformatie naar een basis *(r, s)* getransformeerd worden tot $H^{r,s}$. Als de covariantiematrix $\sigma^{r,s}$ van de coördinaten ook ten opzichte van deze basis is berekend, kan men de punt en relatieve standaardellipsen berekenen. Die kunnen vergeleken worden met de overeenkomstige criteriumcirkels die uit $H^{r,s}$ berekend worden. Via visuele vergelijking ziet men dan of de ellipsen binnen de criteriumcirkels vallen.

In *Fig. 13* wijst deze vergelijking voor het grootste deel van het netwerk op een goede precisie, maar niet voor de hoek rechtsonder. Zou men echter voor een S-basis 1-5 (Berkheide-Schoorl, langs de westkust) gekozen hebben, dan zou de situatie voor het hele netwerk een slecht resultaat geven. De visuele vergelijking is dus afhankelijk van de gekozen S-basis. Daarom stelde Baarda voor om de toets van de matrix $\sigma^{r,s}$ tegen het criterium $H^{r,s}$, via de oplossing van het eigenwaardenprobleem (zie leerboeken lineaire algebra en matrixrekening):

$$| \sigma^{r,s} - \lambda H^{r,s} | = 0$$

Hierbij wordt dus de volledige informatie vervat in beide matrices gebruikt en niet alleen de berekende standaardellipsen. De berekende eigenwaarden λ zijn onafhankelijk van de gekozen S-basis.

De oplossing moet in ieder geval aan de eis voldoen dat voor de kleinste eigenwaarde geldt dat $\lambda_{min} \geq 0$, vanwege het feit dat covariantiematrices en dus ook de criteriummatrix positief

definiet moeten zijn (zie leerboeken). Maar bovendien moet hier voor de grootste eigenwaarde gelden dat: $\lambda_{max} \leq 1$. Dit betekent dat de covariantiematrix van de coördinaten geheel binnen de criteriummatrix ligt. Als er eigenwaarden groter dan een zijn, dan kan men uit de bijbehorende eigenvectoren afleiden wat de zwakke delen van het net zijn.

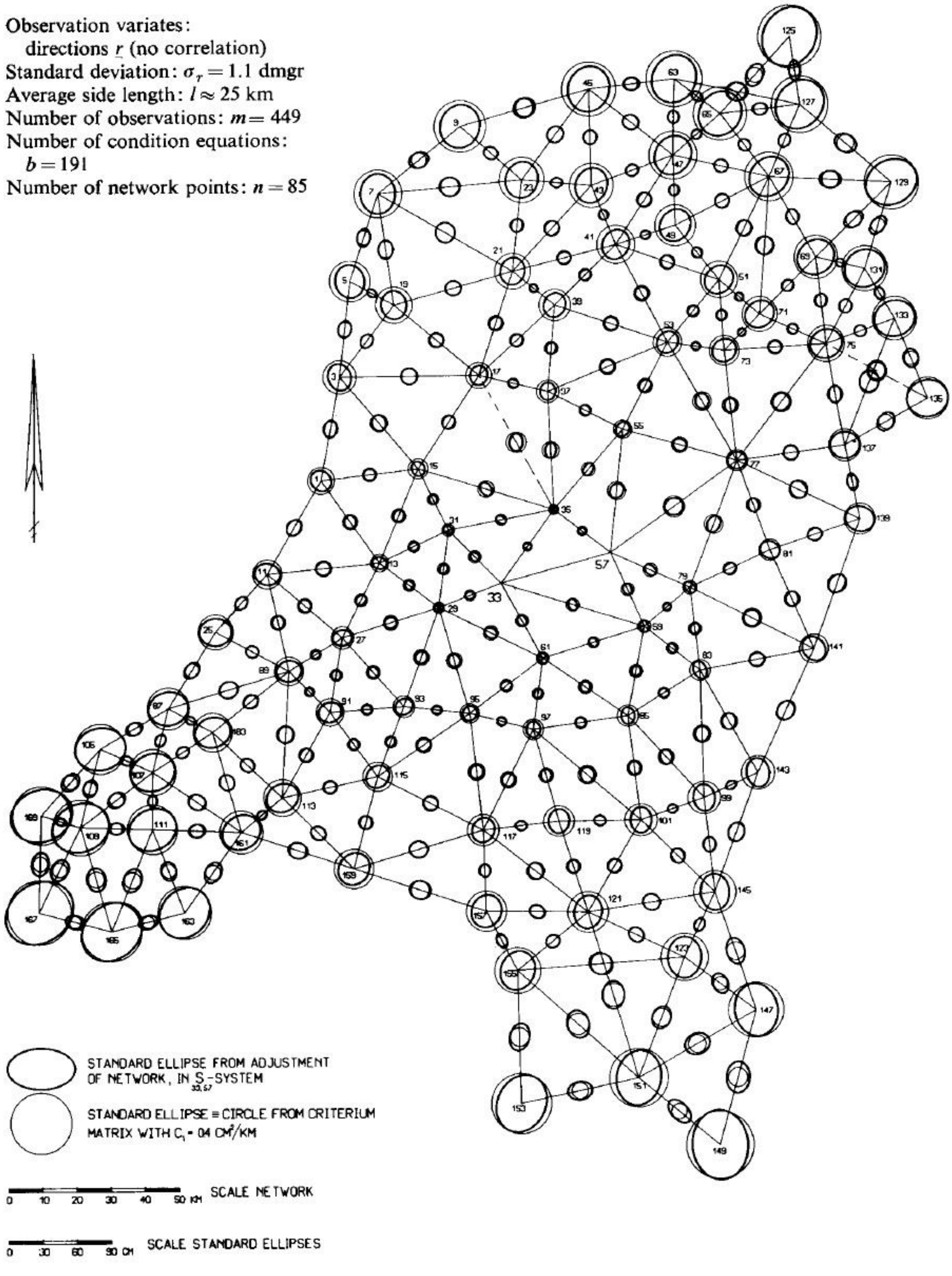


Fig.13: Standaardellipsen (vol getrokken) van het RD-net vergeleken met criteriumcirkels (gestreept), S-basis 33-57

Visueel kan men zich dat zo voorstellen dat de covariantiematrix voor *n* punten een *2n*-dimensionale hyperellipsoïde opspant en de criteriummatrix een *2n*-dimensionale bol of hypersfeer. De hyperellipsoïde ligt dan geheel binnen de hypersfeer, of hij raakt hem net.

Uit de covariantiematrix kan men dan punt- en relatieve standaardellipsen afleiden. Uit de criteriummatrix krijgt men op dezelfde wijze punt- en relatieve criteriumcirkels. Als geldt dat $\lambda_{max} \leq 1$, dan blijkt dat de ellipsen altijd binnen de cirkels liggen of de cirkel net raken. *Fig. 13* toont de vergelijking van relatieve en puntstandaardellipsen van het Nederlandse RD-net tegen een criteriummatrix. We zien dat het grootste deel van het net aan het criterium voldoet. Alleen aan de randen steken de ellipsen op sommige plekken net even door de criteriumcirkels heen. De criteriumstelling kan afgestemd worden op de eisen die aan de precisie van een netwerk worden gesteld, door in de bovengenoemde functie $d_{ij}^2 = c \cdot l_{ij}$ een waarde voor de parameter *c* te kiezen naast een waarde die voor de parameter d^2 gekozen kan worden.

De parameter *c* bepaalt in feite het deel van het criterium dat betrekking heeft op de correlatie tussen punten. Dit gaat dus in wezen over de structuur van het netwerk. De parameter d^2 betreft voor een belangrijk deel de kwaliteit van de puntidentificatie. Deze twee parameters vervangen de parameters van hoofdstuk II van HTW '56.

4.7.5 Vervangingsmatrices

De hierboven beschreven structuur voor de criteriummatrix kon nu ook op een andere manier gebruikt worden. In de toenmalige praktijk was het gewoonte om bij de aansluiting van nieuwe metingen op gegeven punten, de coördinaten van deze punten niet in de vereffening mee te laten doen. Dat hield in dat er wel op werd aangesloten, maar dat deze coördinaten in de berekeningen niet werden meevereffend. Met andere woorden, ze kregen geen correctie. Sterker nog, ze werden als niet-stochastisch beschouwd.

Er was op zich wel een goede pragmatische reden om ze niet te corrigeren, omdat de coördinaten van deze punten op kaarten of in gedrukte tabellen waren opgeslagen en het daardoor onpraktisch en ondoenlijk was om ze dan bij iedere aansluitende meting te corrigeren. Ook later, toen deze gegevens in digitale bestanden beschikbaar waren, bleef het onpraktisch om ze telkens bij te stellen. Maar dat was nog geen reden om ze als niet-stochastisch te beschouwen. De coördinaten waren oorspronkelijk uit metingen berekend en zouden daarom ook een covariantiematrix moeten hebben. Maar deze werd nooit opgeslagen. Dat was technisch niet goed mogelijk. Men legde ook de geschiedenis van het ontstaan van die coördinaten niet vast in de gegevensbestanden, zodat de matrix ook niet gereconstrueerd kon worden.

Dit werd oorspronkelijk niet als bezwaar gezien omdat men toen aannam dat hogere orde verdichtingsmetingen zoveel beter waren dan de aansluitende metingen voor verdere netwerkverdichtingen dat de gegeven coördinaten als foutloos konden worden beschouwd. Met het verbeteren van de technologie verviel dit argument. Ook verdichtingsmetingen waren nu van een kwaliteit, vergelijkbaar met die van de hogere orde metingen. Bovendien gaf, zoals we hierboven al zagen, de benadering van een vereffening in fasen de mogelijkheid om nieuwe metingen eerst zelfstandig door te rekenen en te toetsen. Na deze eerste fase kon het nieuwe net dan op gegeven punten worden aangesloten en konden die gegeven punten worden getoetst. Daarbij bleken er vaak spanningen op te treden, waarvan de oorzaak lag in verstoringen van de gegeven punten. Dit leidde tot het idee dat de gegeven coördinaten wel als stochastisch moesten worden beschouwd en getoetst moesten worden.

Het feit dat hun oorspronkelijke covariantiematrix niet beschikbaar was kon nu worden ondervangen door een vervangingsmatrix in te voeren, die de precisie van die coördinaten

bij benadering beschreef. Hiervoor kon de structuur van de criteriummatrix gebruikt worden, waarbij de waarde voor parameters c en d^2 zo werd ingesteld dat deze matrix de precisie van het bestaande puntenveld redelijk benaderde. Deze vervangingsmatrix kon dan geschrankt worden op een gemeenschappelijke basis met het nieuwe puntenveld. De vereffening werd twee keer doorberekend. De eerste keer streng, zodat de gegeven coördinaten ook meevereffend werden en getoetst volgens de methode van paragraaf 4.6. Als na deze toetsing de gegeven punten die verstoord waren uit de berekening werden verwijderd, volgde een tweede doorrekening waarin de geven coördinaten niet werden gecorrigeerd. Maar de vervangingsmatrix werd wel ingevoerd in de berekening van de precisie van de nieuwe punten via de toepassing van de voortplantingswetten, zij het in aangepaste vorm. Dit werd een *pseudo-kleinste-kwadratenvereffening* genoemd.

4.8 Het Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek

4.8.1. Het begin

In de jaren '50 ontstond bij Baarda het idee om een laboratorium in te richten, waar theoretisch onderzoek gekoppeld kon worden aan de ontwikkeling van de rekentechniek, zie (Alberda 2005) bijlage II.b. De elektronische rekentechniek was in opkomst en het was duidelijk dat de ideeën, die nu in ontwikkeling waren, leidden tot de behoefte aan grote rekencapaciteit. Met steun van het toenmalig Curatorium van de Technische Hogeschool richtte hij rond 1958 het *Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek* (LGR) in. De eerste medewerkers waren ir. B. G. K. Krijger, ir. F. Meerdink en ir. J. E. Alberda.

Een van de ambities voor het LGR was om mee te doen aan grote internationale projecten en de eerste kans kwam halverwege de jaren '50 met de vereffening van het Europese waterpasnet. Dat bestond uit waterpaskettingen over heel West-Europa. Dit werd doorgerekend door het IGN in Parijs, de TH in München en het LGR. Voor de Delftse groep was dit een goede gelegenheid om zowel de methodiek van vereffening in fasen als de ideeën over toetsing uit te proberen op grote meetnetten. Bovendien was het LGR de enige groep die elektronische rekenfaciliteiten gebruikte. Het ging om de ZEBRA-computer van TNO, ontworpen en gebouwd door het Laboratorium van de PTT (Alberda 2005). Het LGR was ook de enige groep die de volledige covariantiematrix van de hoogtes had berekend. Met dit project heeft het LGR haar naam in binnen- en buitenland gevestigd.

Rond 1960 wordt internationaal besloten tot een nieuwe Europese vereffening. Het was de bedoeling om de nationale driehoeksnetten onderling beter aan te sluiten en om tot een verbeterde bepaling van de Europese ellipsoïde te komen. Ondertussen kwamen elektronische afstandsmeters op de markt, eerst de Tellurometer en later de Geodimeter. Hiermee kon men proeven nemen met de opzet van kringnetten, die door het LGR werden doorgerekend.

In 1967 vond de meting plaats van een lengtebasis met invardraden op de Afsluitdijk. Deze nieuwe basis moest worden aangesloten op het RD-net, via de meting van het net Afsluitdijk. In die tijd werd de aansluiting van het RD-net met het Duitse driehoeksnet opnieuw berekend. Bij al deze activiteiten waren de berekeningen van een dusdanige omvang dat die op computers uitgevoerd moesten worden.

4.8.2. De ontwikkeling van rekenfaciliteiten aan de TH-Delft

In dezelfde tijd richtte de wiskundige Prof. R. Timman het Rekencentrum van de Technische Hogeschool in. Hij werd voorzitter van een commissie die zich moest buigen over de aanschaf van een computer voor de TH. Baarda werd secretaris van deze commissie. Eerst speelde nog de discussie of de TH een analoge of een digitale computer zou aanschaffen. Op basis van de bevindingen van deze commissie werd het een digitale, de TR4.

In de commissie vonden vele discussies plaats over de consequenties van de aanschaf van zo'n computer voor de disciplines die daar gebruik van zouden gaan maken. Het werd al snel duidelijk dat deze ingrijpend zouden zijn. Hun impact zou groter zijn dan alleen het feit dat rekenwerk sneller kon worden uitgevoerd. Baarda zegt hierover in (Baarda 1977) bijlage II.a:

> *In that period there were consultations with the mathematician R. Timman concerning the establishment of a computer centre for the Delft University of Technology. We both held the view that independent programming of existing methods was the easiest but also the least efficient way to introduce automation. It was better to consider existing methods as variants of a basic pattern which should be as simple as possible, and concentrate on the programming of this pattern. In addition, it was required to limit the volume of the output by the choice of suitable parameters. In other words: programming should be preceded by model research.*

Dit sluit uiteraard precies aan bij zijn onderzoeksbelangstelling. Naast de meer theoretische invloed van Van Dantzig, die hem in de richting van het fundamentele modelonderzoek stuurde, is hier nu een tweede aanvullende impuls in deze richting. Het onderzoek dat in de voorgaande paragrafen is beschreven, kwam dus voort uit een tweevoudige stimulans, voor zover die naast Baarda's eigen nieuwsgierigheid nodig waren. Wellicht kunnen we beter spreken over een tweevoudige rechtvaardiging.

4.8.3. De ontwikkeling van software

Uiteindelijk werd de TR4 in 1963 door de TH in gebruik genomen met een Algol-60 compiler. Daarmee kon het echte programmeerwerk van het LGR beginnen. Jan de Kruif was een van de eerste studenten, die in het kader van het LGR voor zijn afstuderen een scriptie schreef waarvoor hij een computerprogramma in ALGOL ontwikkelde. Na het behalen van de ingenieurstitel in 1964 werd hij medewerker van het LGR. Hij startte met de bouw van procedures voor het uitvoeren van vereffeningen, zoals matrixvermenigvuldigingen en de inversie van matrices. Omdat de computers in die tijd nog een beperkt werkgeheugen hadden en de in- en uitvoer van gegevens nog niet erg snel was, was het belangrijk om efficiëntie in de opslag en in de in- en uitvoer na te streven. Daarom was de programmatuur in eerste instantie alleen bruikbaar voor het doorrekenen van netten van beperkte omvang. Verder werd de software gericht op het werken met ijle matrices, matrices waarvan zeer veel elementen de waarde = 0 hebben. Hiervoor werden aparte procedures ontwikkeld, de zogenaamde zeefmatrices.

In 1968 begon de ontwikkeling van programmatuur voor vereffening volgens het Eerste en het Tweede Standaardvraagstuk. Zoals we in paragraaf 4.5, opmerking 1 al zagen, was men tot het inzicht gekomen dat deze twee vormen voldoende waren voor het behandelen van landmeetkundige problemen. Voor het Eerste Standaardvraagstuk moesten de voorwaardenvergelijkingen voor kringnetten opgesteld worden (twee veelhoek- en twee netvoorwaarden per gesloten kring). Voor het Tweede Standaardvraagstuk moesten de waarnemingsvergelijkingen opgesteld worden. Door de vaste structuur van de kringnetten kregen de voorwaardenvergelijkingen en de waarnemingsvergelijkingen een vaste vorm die goed programmeerbaar was. De gemeten hoeken en lengteverhoudingen (richtingen en pseudoafstanden) en benaderde waarden voor de aangemeten punten moesten voor de berekening worden ingevoerd. Hier bleek het voordeel van standaardisatie als resultaat van een gedegen modelonderzoek, zoals Baarda in de aangehaalde tekst hierboven bedoelde. De ontwikkelde programmatuur werd bekend onder de naam SCAN. Later hebben de opvolgers van Jan de Kruif onder leiding van Johan Kok en Henk de Heus een nieuwe versie ontwikkeld onder de naam SCAN II.

4.8.4 De berekening van landmeetkundige netwerken

In 1968 vond overleg plaats tussen Baarda en medewerkers met Ir. Claassen van het Kadaster (Kruif 2019). Bij het Kadaster was een groot aantal ruilverkavelingen in voorbereiding, waarvoor landmeetkundige grondslagen gemeten moesten worden om paspunten te leggen voor fotogrammetrische karteringen. Het Kadaster was bereid om de opzet met kringnetten in de praktijk te toetsen en een aantal medewerkers daartoe te laten bijscholen. Met de beschikbare software zou het LGR de vereffening van de kringnetten uitvoeren. De door Baarda ontwikkelde methoden voor het toetsen van de waarnemingen en de toets van de precisie van de berekende coördinaten tegen een criteriummatrix moest daarvoor ook verder uitgewerkt worden.

Daartoe werd rond 1969 de software uitgebreid zodat de w-toets kon worden toegepast voor het opsporen van fouten in kringnetten. Na een vereffening werd eerst een toets voor het hele netwerk uitgevoerd met $\underline{\sigma}_t^2/\sigma^2 < F_{1-\alpha;\, b,\, \infty}$, zie paragraaf 4.6. Dit bleek onbevredigend omdat dit (bijna) altijd tot verwerping van het resultaat van het gehele netwerk leidde. Door ervaring kwam men zo tot de regel dat altijd de w-grootheden voor alle waarnemingen getoetst moesten worden, d.w.z. Data Snooping zou altijd gebruikt moeten worden. Daardoor kon men sneller fouten lokaliseren, zodat dan niet het hele net weer moest worden overgemeten. Met deze aanvulling op de software konden nu ook de bij de w-toetsen behorende grenswaarden voor de waarnemingen (interne betrouwbaarheid) worden berekend en hun effect op de grenswaarden voor de berekende coördinaten (externe betrouwbaarheid).

Omstreeks 1970 werd een begin gemaakt met programma's voor het opstellen van criterium- en vervangingsmatrices en het uitvoeren van S-transformaties. Programma's werden ook ontwikkeld om via de berekening van eigenwaarden de covariantiematrix van coördinaten te vergelijken met een criteriummatrix. Met proefberekeningen kon worden gezocht naar geschikte parameterinstellingen voor het toetsen van de precisie van coördinaten. De eerste resultaten voor gesimuleerde netten werden in (Baarda 1973) gepubliceerd.

Ook werden geschikte parameterwaarden gezocht voor vervangingsmatrices, ten behoeve van de aansluiting van nieuwe metingen op geven coördinaten in een tweede vereffeningsfase. Daardoor was het dan echt mogelijk om de vereffening van netwerken in twee fasen uit te voeren. In de eerste fase werden kringnetten als vrije netten vereffend en getoetst, in de tweede fase werd dit vereffende netwerk aangesloten op gegeven punten. De vervangingsmatrix werd daarbij gebruikt in plaats van de meestal niet bekende covariantiematrix van deze coördinaten. Hiermee kon men in deze fase de gegeven punten toetsen op mogelijke verstoringen. Deze tweede fase werd na die toets meestal als pseudovereffening uitgevoerd omdat vanuit administratief oogpunt bezien de correctie van gegeven coördinaten te omslachtig was. Maar de vervangingsmatrix werd wel gebruikt bij de berekening van de uiteindelijke precisie van de coördinaten van de nieuwe punten.

4.8.5 De verkenning van landmeetkundige netwerken

Met deze software kon men een belangrijke efficiëntieslag maken in het landmeetkundige werk. Het was nu mogelijk om in het terrein een netwerk te ontwerpen. Als voor de geplande nieuwe punten benaderde coördinaten beschikbaar waren, dan was het mogelijk om de interne en externe betrouwbaarheid en de covariantiematrix van de coördinaten van het geplande netwerk te berekenen. De benaderde coördinaten konden meestal van een topografische kaart worden afgelezen. Met de resultaten van zo'n proefberekening kon men dus de betrouwbaarheid van het netwerk beoordelen en de covariantiematrix vergelijken met een criteriummatrix. Het was nu dus mogelijk om de kwaliteit van het geplande netwerk vooraf te beoordelen en het ontwerp eventueel aan te passen voordat men ging meten. Dit gaf een aanzienlijke tijdwinst en reductie van kosten bij de uitvoering van landmeetkundig

werk. In (LGR-staf 1982), zie bijlage II.c, geeft de toenmalige staf van het LGR een mooi overzicht van de stand van de ontwikkeling van ideeën van de Delftse School in het begin van de jaren '80.

4.9 Uitbreiding naar drie dimensies

Met de hierboven beschreven ontwikkelingen was de theorie voor de puntsbepaling in het platte vlak en de kwaliteitsbeoordeling daarvan tot een vergaande afronding gekomen. De reguliere praktijk kon met deze resultaten goed werken. Parallel aan deze ontwikkeling rees sinds het begin van de zestiger jaren de vraag hoe men aan het platte vlak kon ontsnappen en echte ruimtelijke, d.w.z. driedimensionale, netwerken kon opzetten. Van oudsher werd altijd een tweeledige benadering gevolgd met afzonderlijke horizontale (x, y) en verticale (H of hoogte) plaatsbepaling. Voor metingen over grotere gebieden moest men dan rekening houden met de kromming van de aarde. Deze werd benaderd door de horizontale plaatsbepaling te projecteren op een bol of een ellipsoïde. Vanuit theoretisch oogpunt beschouwde men dit als onbevredigend en daarom werd onderzocht hoe echte driedimensionale methodes ontwikkeld konden worden.

Baarda's bezwaar tegen de ellipsoïdebenadering kwam voort uit het feit dat hij de ideeën van Van Dantzig volgde. Uitgangspunt was dat door het meetproces bepaald wordt wat de schatbare grootheden zijn, op basis waarvan het functionele model ontwikkeld wordt. Transformaties van dit model moeten deze grootheden onveranderd laten. Met andere woorden de schatbare grootheden moeten invariant blijven onder deze transformaties. Omdat in de geodesie hoeken en lengteverhoudingen de schatbare grootheden zijn, gaat het in dit geval dus om gelijkvormigheidstransformaties. Deze omvatten schaalaanpassingen, rotaties en verschuivingen in x- en y-richting. De vormelementen op het oppervlak van een omwentelingsellipsoïde zijn alleen invariant bij rotaties om de korte as (poolas), verder niet. Hoewel vervormingseffecten pas voelbaar zijn bij zeer grote netwerken, wees Baarda het ellipsoïdemodel uit principe af.

Hij zocht een benadering voor ruimtelijke netwerken volgens dezelfde methodiek als die hij voor het platte vlak had gevolgd. Het uitgangspunt bleef dus dat in het meetproces hoeken en lengteverhoudingen de schatbare grootheden waren, maar nu niet geprojecteerd op het horizontale vlak. Dus het ging echt om ruimtelijke grootheden. In het platte vlak kon hij een elegante benadering ontwikkelen met complexe getallen, omdat die een delingsalgebra vormen waarin hoeken en lengteverhoudingen goed konden worden behandeld. In de literatuur vond hij begin jaren '60 dat *quaternionen* een uitbreiding van de complexe getallen naar vier dimensies geven, die door een handige interpretatie ook voor de beschrijving van driedimensionale situaties konden worden ingezet (zie annex 8). Nu moesten drie vragen uitgewerkt worden:

a) Hoe moet een S-basis voor driedimensionale situaties gedefinieerd worden?

b) Welke vorm krijgt een criteriummatrix in drie dimensies?

c) Welke structuur hebben netwerken in drie dimensies?

Deze vragen hadden betrekking op de formulering van het functionele model. De procedures voor Data Snooping en de berekening van interne en externe betrouwbaarheid volgden direct uit het vereffeningsalgoritme en vroegen dus niet om een speciale herformulering voor driedimensionale situaties. De berekening van grenswaarden was wel interessant om de betrouwbaarheid van driedimensionale netwerken te leren begrijpen.

4.9.1 Ruimtelijke S-stelsels en criteriummatrices

Uiteraard kwam bij Baarda bij de overgang van twee- naar driedimensionale situaties onmiddellijk de vraag op hoe coördinaten gedefinieerd moesten worden en hoe ze gekoppeld werden aan het meetproces. Ook in driedimensionale situaties zijn de schatbare grootheden hoeken en lengteverhoudingen. Maar nu zijn deze bepaald tussen telkens drie punten in hun ruimtelijke ligging, dus niet geprojecteerd op een horizontaal vlak.

Voor de definitie van een driedimensionaal (3D) coördinatensysteem moeten zeven parameters gekozen worden: drie coördinaten voor de oorsprong (het nulpunt), twee richtingscomponenten voor een coördinaatas, een rotatie om die as en een schaalfactor. Door nu coordinaten te kiezen van twee punten, noem ze P_r en P_s, zijn zes grootheden bepaald en heeft men in wezen drie coördinaten voor de oorsprong gekozen en twee richtingscomponenten en een schaalfactor voor de zijde *r, s*. Hiermee is zo'n stelsel dus vastgelegd op één rotatie na. Hiervoor is een derde punt P_t nodig, maar dat speelt een andere rol dan de eerste twee. Het speelt niet volledig mee omdat er via dit punt maar één parameter moet worden vastgelegd en niet drie zoals bij de andere twee punten. De rotatie om de zijde *r, s* wordt nu gedefinieerd door de richting van de normaal van het vlak *r, s, t* (is de vector met lengte = 1, loodrecht op vlak *r, s, t*) vast te leggen, dus de rotatie van die normaal om de zijde *r, s* wordt vastgelegd. Zie ter illustratie de figuur in annex 8 bij formules (4.2.1) en (4.2.2) en vervang daarin de indices i, j, k door respectievelijk r, s, t.

Deze definitie van een S-basis voor 3D-coördinaten heeft niet langer de eenvoud van die voor 2D-coördinaten. Daarbij komt het feit dat de vermenigvuldiging van quaternionen niet commutatief is (zie annex 8). Door deze feiten wordt de analyse van 3D netwerken een stuk gecompliceerder dan die van netwerken in het platte vlak.

Uit aantekeningen blijkt dat Baarda zijn ideeën voor 3D S-stelsels waarschijnlijk al in de jaren '60 of begin jaren '70 heeft uitgewerkt en ook de bijbehorende S-transformaties afgeleid maar hij heeft die nooit gepubliceerd. Ik heb voor het eerst zelf een S-basis gedefinieerd in mijn afstudeerscriptie (Molenaar 1972) voor de analyse van de structuur van satellietdopplermetingen. Later heb ik deze definitie met de bijbehorende 3D S-transformatie verder uitgewerkt voor mijn proefschrift (Molenaar 1981). Ik liep tegen dit vraagstuk aan in de jaren '70 toen ik het concept van criteriummatrices wilde toepassen voor de resultaten van vereffende fotogrammetrische blokken.

Daarvoor werd ook een 3D-criteriummatrix ontwikkeld, die naar een S-basis getransformeerd moest worden. Hierover heb ik tijdens mijn promotieonderzoek veel discussie gehad met Baarda. Hij wilde uitgaan van een matrix die bolvormige relatieve- en puntstandaardellipsoïden genereerde. Mijn bezwaar was tweeledig:

a) Dat zou alleen gelden voor een niet geschrankte criteriummatrix. Zo gauw die getransformeerd wordt naar een S-basis, wordt de standaardellipsoïde voor basispunt P_t platgeslagen tot een cirkel in het vlak van de basispunten *r, s,* en *t.* Door de transformatie zouden ook de overige standaardellipsoïden een afgeplatte vorm hebben.

b) De ervaringen in de fotogrammetrie en ook in de geodesie leidden tot het inzicht dat de nauwkeurigheid van de hoogtebepaling over het algemeen minder is dan die van de horizontale positie van punten. Daarom is het zinvol dat de eisen voor hoogte en planimetrie afzonderlijk kunnen worden ingesteld.

Baarda heeft mij nooit echt gelijk gegeven, maar hij liet me de criteriummatrix wel op mijn manier uitwerken. Dat is gebeurd door het horizontale criterium uit te werken voor bolcoördinaten, zodat die voor horizontale posities met het aardoppervlak meeboog. En ook het criterium voor hoogte boog met het aardoppervlak mee. Dit gold voor metingen over

grote gebieden. Voor netwerken van kleinere afmetingen viel deze matrix terug tot de structuur van de criteriummatrix voor het platte vlak (Molenaar 1981). Proefberekeningen toonden toen aan dat voor gebieden met een omvang van 500x500 km^2, voor coördinaten in het horizontale vlak het onderscheid tussen de matrix van (Baarda 1973) en deze nieuwe matrix verwaarloosbaar was. Dat was toen voor mij voldoende reden om het model niet verder te verfijnen en niet meer te zoeken naar een matrix die meebuigt met het oppervlak van een ellipsoïde.

4.9.2 Ruimtelijke netwerken

Naast het probleem van de operationele definitie van coördinaten, dus van 3D S-stelsels, was er natuurlijk ook de vraag hoe Baarda's benadering van netwerken in het complexe vlak kon worden uitgebreid naar drie dimensies. Wat was de structuur van ruimtelijke kringnetten? Baarda heeft al in een vroeg stadium verkenningen gedaan hoe quaternionen als analogon van de complexe getallen konden worden ingezet voor de berekening van ruimtelijke netwerken. De resultaten van dit werk zijn helaas alleen vastgelegd in persoonlijke notities. Een eerste studie die voor anderen toegankelijk was, betrof de afstudeerscriptie van Eric Vermaat (Vermaat 1970). Daarin onderzocht hij de structuur van quaternionrotaties. Dit was belangrijk voorwerk, voordat de structuur van netwerken kon worden onderzocht.

Die taak werd voor het eerst opgepakt door Herman Quee. Hij ontwikkelde programma's voor het doorrekenen van de voorwaardenvergelijkingen van ruimtelijke gesloten polygonen, kringnetten, in het kader van zijn afstudeerscriptie bij het LGR in 1971. Deze werden geformuleerd in de vorm van quaternionrelaties. De structuur was vergelijkbaar met die van de voorwaardenvergelijkingen die in (Baarda 1969) werden gegeven voor polygonen in het platte vlak (complex plane). De numerieke resultaten toonden afhankelijkheden tussen deze voorwaarden maar die zijn toen nog niet analytisch aangetoond. In zijn promotieonderzoek heeft hij dit verder uitgewerkt en gepubliceerd (Quee 1983). Let wel, we hebben het hier over de tijd voor de opkomst van GPS en andere nieuwe meettechnieken. Hij onderscheidde twee types van netwerken, te weten:

a) Polygoonnetwerken, kringnetten over grotere gebieden, zoals die gemeten worden als geodetische hogere orde netwerken. Deze netwerken hebben hoogteverschillen die relatief klein zijn ten opzichte van de zijdelengtes. De opstelpunten voor metingen liggen relatief ver uit elkaar en de richting van de zwaartekracht buigt mee met het aardoppervlak. Daardoor kan men niet meer aannemen dat de richtingen van de verticale as van de theodoliet in de verschillende opstelpunten onderling evenwijdig zijn. De astronomische lengte en breedte van deze punten moeten dan bepaald worden om de verandering van de richting van de zwaartekracht te bepalen. Bovendien moet op verschillende punten het astronomische noorden bepaald worden voor de oriëntatie van de horizontale richtingsmeting. Deze gegevens zijn dus onderdeel van de geformuleerde voorwaardenvergelijkingen, hetgeen het functionele model aanzienlijk gecompliceerder maakt dan voor polygonen in het platte vlak het geval was.
b) Lokale netwerken zoals die gemeten worden voor technische werkzaamheden. Bij deze metingen liggen de opstelpunten voldoende dicht bij elkaar om de richting van de zwaartekracht overal gelijk te veronderstellen. Dat betekent dat alle opstelpunten een gemeenschappelijk horizontaal vlak hebben. Hiermee vervalt de noodzaak voor astronomische waarnemingen. Bij deze metingen zijn over het algemeen de hoogteverschillen groter ten opzichte van de zijdelengtes in het netwerk.

Met deze studie was de ontwikkeling van een op het gebruik van quaternionen gebaseerd functioneel model voor 3D terrestrische netwerken, zo goed als voltooid. Hiermee was de

uitbreiding van de theorie, zoals Baarda die ontwikkeld had voor puntsbepaling in het platte vlak, uitgebreid voor 3D-situaties. De definitie van ruimtelijke S-stelsels, S-transformaties en criteriummatrices en de structuur van ruimtelijk polygoonnetwerken was nu in kaart gebracht. Het wachten was nu op de werkelijke toepassing, om te zien of de theorie in de praktijk ook goed inzetbaar was.

4.9.3 Fotogrammetrie

Parallel aan bovenstaande ontwikkelingen heeft Baarda ook gezocht naar een beschrijving van de fotogrammetrie met behulp van quaternionen. Hij heeft daar zelf een opzet voor gemaakt en die besproken met fotogrammeters zoals Schermerhorn, Roelofs en Van der Weele met hun medewerkers. Maar de respons was weinig enthousiast. In de tijd dat dit speelde werkte de fotogrammetrie nog voornamelijk met instrumentele methodes voor het karteren vanuit luchtfoto's en waar het op rekenen aankwam werden in eerste instantie analoge methodes gebruikt.

Met de opkomst van de computertechnologie werden wiskundige modellen ontwikkeld, maar die hadden totaal andere uitgangspunten dan die voor de landmeetkunde en geodesie. Zoals we zagen werden de modellen in de landmeetkunde vooral ontwikkeld uitgaande van hoek- en afstandsmeting. In de fotogrammetrie waren er twee benaderingen:

a) Foto's werden in paren uitgewerkt in fotogrammetrische instrumenten waarin stereomodellen werden gevormd. In deze modellen werden terreinpunten in 3D-coördinaten geregistreerd. Daarna werden uit groepen aansluitende modellen blokken gevormd, waarbij de modellen via gelijkvormigheidstransformaties naar een gemeenschappelijk coördinatensysteem werden omgerekend via een zogenaamde "*onafhankelijke modellen*" blokvereffening. Het uitgangspunt was hierbij dus de transformatie van coördinatensystemen en niet een vereffening uitgaande van vormelementen.

b) In de tweede benadering werden in onderling overlappende luchtfoto's afbeeldingen van terreinpunten aangemeten. Deze punten werden via de formules van de projectieve transformatie gekoppeld aan de oorspronkelijke terreinpunten. Als nu van voldoende punten de terreincoördinaten bekend waren, konden via een gemeenschappelijke "*bundelblok*" vereffening de terreincoördinaten berekend worden van alle andere in foto's aangemeten punten.

De werkwijze in de fotogrammetrie was dus zo anders dan in de landmeetkunde, dat Baarda geen opening vond voor zijn benadering. Uit persoonlijke aantekeningen die ik van hem heb gezien, bleek ook dat zijn benadering op zich niet goed was. Hij ging uit van een verkeerde samenhang tussen triplets van punten op de foto en de terreinsituatie. Hij bepaalde in de foto dan Q-grootheden op basis van de vormelementen van die triplets en koppelde die aan overeenkomstige Q-grootheden (zie annex 8) in het terrein. Het probleem was dat de relatie tussen foto en terrein door de projectieve transformatie beschreven wordt en niet door een gelijkvormigheidstransformatie. Deze benadering liep daarom vast.

Hij heeft mij gevraagd om hier ook naar te kijken in de jaren '70, in mijn eerste periode op het ITC. Deze vraag heeft me een tijd beziggehouden en het onderzoek naar de ruimtelijke S-transformatie en criteriummatrix is daaruit voortgekomen. Baarda zocht in wezen een alternatieve formulering voor de onder b) beschreven bundelblokvereffening. Zijn uitgangspunt was dat vormelementen tussen terreinpunten daarbij een centrale rol speelden. Dat was echter niet zo. Als foto's worden opgevat als bundels richtingsmetingen vanuit het opnamepunt naar terreinpunten, kan men de analogie met theodolietmetingen zien. Ik volgde die benadering. Bij een modelformulering met quaternionen liep ik toen aan tegen het feit dat er alleen richtingsmetingen beschikbaar waren en geen afstandsmetingen of lengteverhoudingen. Daardoor vervielen alle quaternionrelaties tot hun vectoriële deel en

kon het model dus net zo goed met behulp van vectoralgebra beschreven worden (Molenaar 1982).

Opmerking: De formulering in (Molenaar 1982) was ook nieuw in de fotogrammetrie. Het bleek dat voor de relatieve oriëntering van twee overlappende luchtfoto's niet, zoals gebruikelijk, vijf maar slechts drie onbekenden opgelost hoefden te worden. Bovendien waren geen nauwkeurige benaderde waarden voor deze onbekenden nodig om het oplossingsalgoritme op te starten. Verder gaf deze benadering de mogelijkheid om de blokvereffening volgens het Eerste Standaardvraagstuk (of eigenlijk Tienstra's Standaardvraagstuk IV) te formuleren, waardoor een stapsgewijze fasevereffening mogelijk was. Dit algoritme toonde een gelijkenis met dat van Kalmanfilters, zoals genoemd in de opmerking aan het eind van paragraaf 3.5.1.

5. Nabeschouwing

Einde van een tijdperk

De voltooiing van de theoretisch uitbreiding van twee naar drie dimensies viel ongeveer samen met het moment dat Baarda met emeritaat ging. Daarmee kwam de periode die in deze monografie behandeld wordt, tot een einde. Dit laatste deel van de theorie is niet echt in de praktijk getoetst. Er waren bovendien twijfels of de benadering van de vereffening van driedimensionale netwerken in twee fasen goed uitvoerbaar was. Vooral netwerken van het type a) in paragraaf 4.9.2 waren waarschijnlijk niet stabiel genoeg om ze in eerste fase als vrij netwerk te behandelen. Ervaringen in de fotogrammetrie kwamen ook tot dergelijke bevindingen.

Vooral de opkomst van GPS heeft een enorme impuls gegeven aan de veranderende rol van de geodesie en geodeten. Maar er kwam nog een, zij het nogal vertraagde, afronding van de behandelde periode met de uitgave van een nieuwe versie van de HTW in 1996. In de behandelde materie bleek ook duidelijk het doorbreken van een nieuwe tijd. Men werd met andere vragen geconfronteerd, terwijl GPS het mogelijk maakte dat precisie-plaatsbepaling in de meeste toepassingen werd uitgevoerd door professionals uit andere disciplines. Aardobservatie nam een grote vlucht, de moderne informatica brak definitief door met grote gevolgen voor het werk van de Geodeet. Dit alles is dan ook een goede reden om de ontwikkelingen na het begin van de jaren ‘80 in een nieuw deel van deze monografieserie te behandelen.

Publicaties en invloeden van buitenaf

Het is opmerkelijk dat deze succesvolle onderzoekstraditie van circa vijftig jaar tot een beperkt aantal publicaties heeft geleid, waarvan dan nog maar een klein deel in de internationaal erkende wetenschappelijke tijdschriften. Toch heeft het werk in de geodesie en aanverwante disciplines een grote weerklank gevonden. Het boek van Tienstra en een aantal publicaties van Baarda in de gele serie van de NCG, hebben grote invloed gehad. Opvallend is ook dat verreweg de meeste publicaties, die uit dit onderzoek voortkwamen, op naam stonden van alleen de twee hoofdrolspelers, Tienstra en Baarda. Baarda heeft één artikel samen met Alberda gepubliceerd (Baarda en Alberda 1962) en Alberda heeft bijgedragen aan meerdere publicaties van Baarda, maar uiteindelijk verschenen die toch alleen onder de naam van Baarda.

In de vijftig jaar die hier beschreven worden kreeg een mooi afgeronde en voor de praktijk zeer relevante theorie vorm. Het is daarom wonderlijk dat er op basis van dit werk nooit een leerboek bij een uitgever is verschenen, waarin een toegankelijke en goed samenhangende introductie wordt gegeven met voorbeelden hoe de theorie in de praktijk gebruikt kan worden.

In deze monografie is een wat monolithische benadering gevolgd, waarbij ik, vooral op basis van de publicaties van de hoofdrolspelers en directbetrokkenen, de geschiedenis van de theorieontwikkeling van de Delftse School heb gereconstrueerd. Uit die publicaties blijkt niet duidelijk hoe anderen het werk van Tienstra en Baarda beïnvloed hebben. Daarbij moeten we uiteraard een uitzondering maken voor Van Dantzig en zijn omgeving. Baarda verwijst wel nadrukkelijk naar de standaardliteratuur op het gebied van de mathematische statistiek. Cramer is al genoemd en het werk van Fisher komt duidelijk aan de orde. Maar wat de invloed is geweest van de geodetische vakgenoten blijft onduidelijk. Hij verwijst wel naar hun werk, maar laat niet zien hoe hij dat incorporeert in de ontwikkeling van zijn eigen ideeën. Het zou de moeite waard zijn om dat nog eens nader te onderzoeken. Om toch een beeld te krijgen van de ideeën die elders in de geodetische gemeenschap leefden, vooral zo

rond de jaren ‘80, is in bijlage I.c een artikel opgenomen waarin Jan van Mierlo een overzicht geeft (Mierlo 1982).

Promovendi
Wat ook opvalt, is dat van de over het algemeen toch goed gekwalificeerde medewerkers nooit iemand gepromoveerd is. Baarda was zelf ook niet gepromoveerd. Ook op dit punt was er een grote terughoudendheid, net als bij het publiceren van het werk. Pas aan het einde van zijn loopbaan heeft hij vier studenten geaccepteerd als promovendi. Ook dat ging wel met enige aarzeling. Ik herinner me nog dat ik met enige regelmaat overleg met Baarda had over het onderzoek dat ik in de jaren ‘70 op het ITC deed, om zijn ideeën toe te passen op de fotogrammetrie. Bij één van die overleggen was mijn toenmalige collega en vriend Cor van der Hout aanwezig. Baarda liet zich ontvallen dat het materiaal dat ik liet zien eigenlijk wel een proefschrift waard was, waarop Van der Hout insprong en zei “ik ben getuige, Baarda!” Toen we een paar jaar verder waren was er weer een overleg, nu was Diederik van Daalen erbij aanwezig. Aan het eind van de bespreking zei hij dat er toch meer dan genoeg materiaal op tafel lag om het onderzoek af te ronden. Daarna stemde Baarda in en werd een promotiedatum afgesproken.

Van de vier promotieprojecten die Baarda op het einde van zijn loopbaan begeleidde, droegen die van Herman Quee en mij duidelijk bij aan de afronding van de in deze monografie beschreven onderzoeksperiode (Molenaar 1981) en (Quee 1983). Het onderzoek van Frits Brouwer betrof de inzet van de ontwikkelde theorie op een aanverwant vakgebied, de astronomie en meer speciaal de Very Long Baseline Interferometry, (Brouwer 1985). Peter Teunissen bracht ten slotte met zijn proefschrift (Teunissen 1985) het onderzoek in een nieuwe fase. Hij zou de lijn na Baarda voortzetten en er een nieuw elan aan geven.

Ten slotte
Onder geodeten, vooral die met een Delftse achtergrond, wordt de term Delftse School gebruikt. De al eerdergenoemde Diederik van Daalen heeft hier als relatieve buitenstaander een essay aan gewijd in een lustrumboek van het Landmeetkundig Genootschap Snellius (Daalen 1985). Zijn essay is zeker het lezen waard, vandaar dat het is toegevoegd als bijlage I.d.

Al met al kunnen we vaststellen dat deze monografie een ontwikkeling in de geodesie beschrijft, die van groot belang was voor het vakgebied in binnen- en buitenland. Deze waardering blikt ook uit de vele eretitels die Baarda ontving. Een van de belangrijkste was het eredoctoraat dat hem in 1982 toegekend werd door de Universiteit van Stuttgart.

Wat we hier hebben laten zien, is dat deze lijn van onderzoek is aangezet en uitgewerkt door de zeer persoonlijke inzet van twee grote mannen, Tienstra en Baarda. Hun intuïtie en werkkracht is bepalend geweest voor het succes van de Delftse School. Tienstra overleed te vroeg, zodat hij zijn taken voortijdig moest overdragen aan Baarda. Die heeft zich een meer dan waardig opvolger betoond. Bij zijn emeritaat in 1982 was het dan ook de vraag of hij zou stoppen. Dat was uiteraard niet het geval.

De vraagstelling over de koppeling tussen meetsystemen en de definitie van coördinatenstelsels bleef hem bezighouden. Bij de NCG verscheen in 1979, vlak voor zijn pensioen, nog een publicatie over deze vragen en in 1995, hij was toen 78, verscheen nog een vervolg. Het waren moeilijk toegankelijke publicaties, maar ze toonden aan dat hij tot op hoge leeftijd bleef volhouden. Dat bleek ook in 1997, bij zijn tachtigste verjaardag. Bij die gelegenheid werden zijn vier promovendi en de voorzitter van de Vereniging voor Geodesie gevraagd om een bijdrage te leveren aan een speciale uitgave van het vaktijdschrift NGT-Geodesia. Als dank hiervoor kregen de schrijvers een persoonlijke brief van Baarda (Baarda 1997), zie bijlage I.e. Daarin ging hij kort in op de bijdragen, waarna hij beschreef hoe hij nog steeds

worstelde met het coördinaatbegrip in de moderne Geodesie. Dit laat zien dat deze vraag hem zijn leven lang, tot op hoge leeftijd, heeft beziggehouden, zoals een zin uit deze brief aantoont:

> *Toen dacht ik .... aan de vraag van Bridgeman ..... welke coördinaten Einstein eigenlijk gebruikte.... De coördinatendefinitie is nog slechter dan die van het Kadaster, hij wordt namelijk geheel gepasseerd.*

Annexen:

Annex 1: Standaardvraagstuk I

Kleinste kwadratenvereffening met voorwaardenvergelijkingen

Laat $\underline{x}$ een vector zijn van n waarnemingsgrootheden met een covariantiematrix

$\sigma_{xx} = \sigma^2 \cdot g_{xx}$, met hierin σ^2 = een schaalfactor – een variantie factor, dan is:

- De matrix g_{xx} is de gewichtscoëfficiëntenmatrix van $\underline{x}$.
- De matrix g_{xx}^{-1} is de inverse van g_{xx} en wordt de gewichtsmatrix van $\underline{x}$ genoemd,
- De diagonaalelementen van deze matrix zijn dan de gewichten van de waarnemingsgrootheden $\underline{x}$.

Nu gelden voor lineaire functies $\underline{y} = B \cdot \underline{x}$ de voortplantingswetten:

- voor verwachtingswaarden: $E\{\underline{y}\} = B \cdot E\{\underline{x}\}$
- en voor gewichtscoëfficiëntenmatrix: $g_{yy} = B^T \cdot g_{xx} \cdot B$ en dus ook $\sigma_{yy} = B^T \cdot \sigma_{xx} \cdot B$

Stel dat $\underline{t} = U \cdot \underline{x} + U_0$ staat voor b (lineaire) functies van de waarnemingsgrootheden $(b<n)$, dan is $E\{\underline{t}\} = U \cdot E\{\underline{x}\} + U_0$. Als nu $E\{\underline{t}\} = 0$, dan noemen we de bovenstaande functies voorwaardevergelijkingen, het zijn voorwaarden waaraan de waarnemingsgrootheden moeten voldoen. Als voor een stel waarnemingen geldt dat $\underline{t}=U \cdot \underline{x} + U_0 \neq 0$ dan noemen we $\underline{t}$ de vector van de sluittermen en moeten de waarneming correcties v krijgen zodat $\underline{X} = \underline{x} - \underline{v}$ en $U \cdot \underline{X}=0$

Er zijn vele oplossingen voor $\underline{v}$, maar wij zoeken de zogenaamde kleinste kwadraten oplossing waarvoor geldt:

$\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v}$ = minimaal!

De *voortplantingswetten voor gewichtscoefficienten* geven voor de sluittermen $\underline{t}$ de gewichtscoëfficiëntenmatrix

$g_{tt} = U^T \cdot g_{xx} \cdot U$ en dus ook $\sigma_{tt} = \sigma^2 \cdot g_{tt}$

Dan is de oplossing voor v (zie leerboeken)

$\underline{v} = g_{xx} \cdot U^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t} = B \cdot \underline{t}$

waarin $g_{vv} = B \cdot g_{tt} \cdot B^T = g_{xx} \cdot U^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot U \cdot g_{xx}$

en voor de gecorrigeerde waarnemingen X is: $G_{XX} = g_{xx} - g_{vv}$

Opmerking: In de termen van Tienstra zouden we g_{xx} de matrix van cofactoren van $\underline{x}$ kunnen noemen, een term die in de tensorcalculus ook gebruikt wordt.

Annex 2: Standaardvraagstuk II, III, IV en V

Standaardvraagstuk II: Kleinste-kwadratenvereffening met waarnemingsvergelijkingen.

In deze vorm worden de gecorrigeerde m waarnemingen $\underline{X}$ uitgedrukt als een functie van de n-b onbekenden $\underline{Y}$

$\underline{X} = A \cdot \underline{Y} + A_0$, met $\underline{X} = \underline{x} - \underline{v}$ dus $A \cdot \underline{Y} + A_0 = \underline{x} - \underline{v}$

Ook hier moet voor de correcties v weer gelden: $\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v}$ = minimaal!

Als nu $N = A^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot A$ dan is (zie leerboeken):

$\underline{Y} = N^{-1} \cdot A^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot (\underline{x} - A_0)$ met $g_{YY} = N^{-1}$

Meestal is de uitgangsrelatie een niet lineaire functie $\underline{X} = F(\underline{Y})$. De waarden voor $\underline{Y}$ moeten nu gevonden worden. Door goede benaderde waarden $\underline{y}_0$ te kiezen kan men overgaan op een benaderde oplossing

$\underline{x}_0 = F(\underline{y}_0)$

Er moet nu naar correcties voor de benaderde waardes $\underline{x}_0$ en $\underline{y}_0$ worden gezocht om de gecorrigeerde waardes $\underline{X} = \underline{x}_0 + \Delta\underline{X}$ en $\underline{Y} = \underline{y}_0 + \Delta\underline{Y}$ te berekenen die wel voldoen aan de uitgangvergelijkingen $\underline{X} = F(\underline{Y})$. Als $\Delta\underline{X}$ en $\Delta\underline{Y}$ relatief klein zijn dan kan uit deze relatie bij benadering een lineaire relatie gevonden worden die de structuur van standaardvraagstuk II heeft:

$\Delta\underline{X} = A \cdot \Delta\underline{Y} + A_0$

waarbij A de jacobi-matrix van functie F is. Door de invoering van $\underline{x}_0$ zal in de vergelijkingen de grootheid $\Delta\underline{x}_0 = \underline{x} - \underline{x}_0$ de rol van de oorspronkelijke waarnemingen $\underline{x}$ overnemen. De oplossing voor deze formulering gaat dan volgens het algoritme van annex 2.

Tienstra formuleerde nog drie varianten voor de standaardvraagstukken. Hier worden alleen de startvergelijkingen gegeven, zie de leerboeken voor de oplossingen:

Standaardvraagstuk III:

Met hetzelfde gebruik van symbolen bestaan de startvergelijkingen hier uit twee groepen:

$\underline{X} = A \cdot \underline{Y} + A_0$ en $U \cdot \underline{Y} + U_0 = 0$

De eerste groep bestaat dus weer uit waarnemingsvergelijkingen als in standaardvraagstuk II en de tweede groep bestaat uit voorwaardevergelijkingen voor de onbekende Y.

Standaardvraagstuk IV:

Met hetzelfde gebruik van symbolen zijn de startvergelijkingen:

$A \cdot \underline{Y} = U \cdot \underline{X} + U_0$ of $A \cdot \underline{Y} - U \cdot \underline{X} - U_0 = 0$

Hierin zijn de waarneming dus niet direct als functie van de onbekenden uitgedrukt, maar zijn (lineaire) functies van de waarnemingen als functie van de onbekenden uitgedrukt. Deze uitgansvorm wordt vaak in complexere problemen gehanteerd, zoals in de fotogrammetrie.

Standaardvraagstuk V:

Hier zijn de startvergelijkingen een combinatie van de situaties in III en IV:

$A \cdot \underline{Y} + A_0 = U_1 \cdot \underline{X}$ en $U_2 \cdot \underline{Y} + U_0 = 0$

Annex 3: De geometrische interpretatie van de standaard-vraagstukken

Stel men heeft n waarnemingen x_i, die geven samen een waarnemingsvector van dimensie n. Die kunnen we weergeven in een ruimte (de x-ruimte) met n assen. In deze x-ruimte kunnen twee deelruimtes gedefinieerd worden, nl.:

- Een b–dimensionale t-ruimte: dat is de deelruimte van de voorwaardevergelijkingen, daarin ligt de vector $\underline{t}$;
- Een a-dimensionale Y-ruimte: dat is de deelruimte van te schatten onbekenden Y.

Hierbij is $a+b=n$ dus de twee deelruimtes hebben gezamenlijk dezelfde dimensie als de oorspronkelijke x-ruimte.

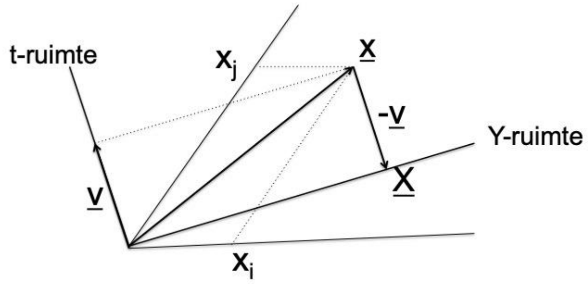


Fig. A3: Geometrische voorstelling X-, Y-, en t-ruimte

Nu hebben we in de annexen 1 en 2 gezien dat voor de kleinste-kwadratenschatters geldt dat: $\underline{X} = A \cdot \underline{Y}$ hetgeen betekent dat de vector $\underline{X}$ geheel in de Y-ruimte ligt. Bovendien is $U \cdot \underline{X}=0$

Als een meetproces herhaald wordt zullen de resultaten voor $\underline{x}$ variëren en dat betekent dat ook de uitkomsten voor $\underline{Y}$ en $\underline{X}$ zullen variëren. Maar voor alle uitkomsten geldt dat: $U \cdot A \cdot \underline{Y} = 0$. Daaruit volgt dan dat $U \cdot A = 0$. De vector $\underline{X}$ staat daarom orthogonaal op de t-ruimte en dus staan de Y-ruimte en t-ruimte orthogonaal op elkaar. Dit alles kan geometrisch verbeeld worden als in *Fig. A3*.

x_i en x_j zijn de parallelle projecties van de vector $\underline{x}$ (vector van waarnemingen) op de respectieve assen van de x-ruimte. De vector $\underline{v}$ ligt geheel in de t-ruimte en staat daarom orthogonaal op de Y-ruimte. De vector met correcties $\underline{v}$ projecteert de vector $\underline{x}$ dus ook orthogonaal op de Y-ruimte en dat is precies wat kleinste-kwadratenschatters doen. De (gewogen) som van de kwadraten van de correcties $\underline{v}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{v}$ geven de lengte van de correctievector en deze is minimaal als die loodrecht op de Y-ruimte staat.

In de hier geschetste x-ruimte staan de assen niet loodrecht op elkaar. Daardoor kan de lengte van een vector $\underline{X}$ niet direct via de stelling van Pythagoras berekend worden, als som van de kwadraten van de elementen X_i. De lengte moet hier berekend worden uit het product $\underline{X}^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot \underline{X}$. Hierin wordt g_{xx} de metrische tensor genoemd; deze compenseert het feit dat de assen niet onderling loodrecht zijn en het feit dat er mogelijk verschillende schaaleenheden langs de assen gelden. In onze toepassing is dat de matrix der gewichtscoëfficienten. Evenzo berekenen we in de t-ruimte $\underline{t}^T \cdot g_{tt}^{-1} \cdot \underline{t}$

Annex 4: Standaardellipsen en foutenkrommen

Als x een normaal verdeelde grootheid is met verwachtingswaarde $E\{x\} = \mu$ en de variantie $E\{(x - \mu)^2\} = \sigma^2$, dan wordt de verdelingsfunctie van x weergegeven door *Fig. A4*:

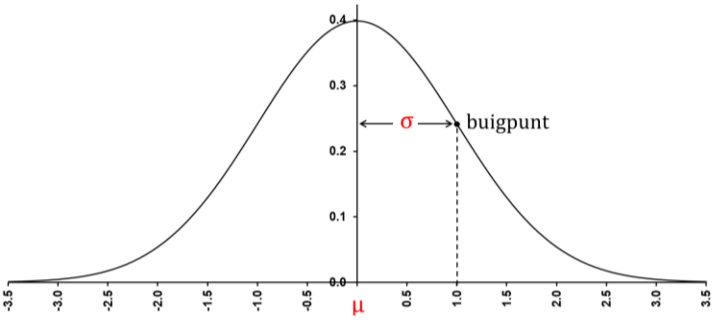


Fig. A4: normale verdeling

Deze figuur laat zien dat σ de vorm van de kromme bepaalt, daarom wordt deze grootheid als maat voor de spreiding van x gebruikt. Uit bovenstaande volgt dat (zie leerboeken statistiek, b.v. (Cramer, 1957) en (Hogg en Craig 1970)):

$$E\{(\underline{x} - \mu)^2 / \sigma^2\} = 1$$

Dit geldt voor de spreiding van één normaal verdeelde grootheid. Ingeval van n normaal verdeelde grootheden samengevat in de vector $\underline{x}$, vinden we volgens annex 1:

$$E\{\underline{x}\} = \mu$$

In plaats van de bovenstaande variantie vinden we nu voor de n grootheden samen de nxn covariantiematrix σ_{xx}. Deze matrix neemt dus in dit geval de rol van de variantie over. Hiermee krijgen we dan:

$$E\{(\underline{x} - \mu)^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot (\underline{x} - \mu)\} = 1$$

Hierbij bepaalt σ_{xx} de vorm van de n-dimensionale verdeling. Als het om twee variabelen $\underline{x}$ gaat en we schrijven $\underline{x} - \mu = \underline{x}'$ dan definieert volgens de analytische meetkunde de formule

$$\underline{x}'^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot \underline{x}' = 1$$

een ellips, waarvan de vorm door σ_{xx} bepaald wordt. In de landmeetkunde werden daarom uit de covariantiematrix van de (X, Y) coördinaten van de ingemeten punten de zogenaamde puntstandaardellipsen berekend. Uit de covariantiematrix van de coördinatenverschillen tussen twee punten werden zo ook de relatieve standaardellipsen berekend. Deze standaardellipsen waren dan een weergave van de (relatieve) nauwkeurigheid van punten.

Annex 5: De definitie van Π-grootheden

Extract van (Baarda 1962)

If we consider a rectangular x, y coordinate system with equal units of measurement on the axes, the only transformation admissible within Euclidean geometry is the general similarity transformation.

The arbitrary choice of a coordinate system can therefore be expressed by the introduction of a coordinate system which is not uniquely determined but can be subjected to similarity transformations.

If we introduce the complex quantity

$$z = x + iy \quad \ldots \quad (3.1)$$

this means that the following z' system is equally admissible:

$$z' = \gamma z + \delta \quad \ldots \quad (3.2)$$

in which γ and δ are complex transformation constants.

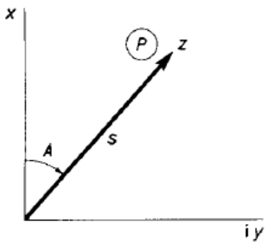


Fig. 3-1

Fig. 3-2

For the theory to be developed, the essential quantities are those that are invariant with respect to the transformation (3.2.)

Consider the points P_i, P_j, P_k, P_l and define relative coordinates or coordinate differences as follows:

$$x_{ij} = x_j - x_i$$

$$y_{ij} = y_j - y_i$$

and consequently

$$z_{ij} = x_{ij} + iy_{ij} = z_j - z_i \quad \ldots \quad (3.3)$$

For point coordinates we have, by (3.2):

$$\left.\begin{aligned} z_i' &= \gamma z_i + \delta \\ z_j' &= \gamma z_j + \delta \\ z_k' &= \gamma z_k + \delta \\ z_l' &= \gamma z_l + \delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.4)$$

and for relative coordinates, by (3.3):

$$\left.\begin{aligned} z_{ij}' &= \gamma z_{ij} \\ z_{kl}' &= \gamma z_{kl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.5)$$

The introduction of relative coordinates results in quantities that are invariant with respect to changes in δ, but not with respect to changes in γ.

Quantities invariant with respect to changes in both δ *and* γ follow from (3.5):

$$\frac{z'_{kl}}{z'_{ij}} = \frac{z_{kl}}{z_{ij}} \quad \ldots\ldots \quad (3.6)$$

Let

$$\frac{z_{kl}}{z_{ij}} = e^{(\Lambda_{kl}-\Lambda_{ij})} \quad \ldots\ldots \quad (3.7a)$$

with (ln denotes the natural logarithm):

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \ln z_{ij} = \ln s_{ij} + iA_{ij} \\ \Lambda_{kl} &= \ln z_{kl} = \ln s_{kl} + iA_{kl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.7b)$$

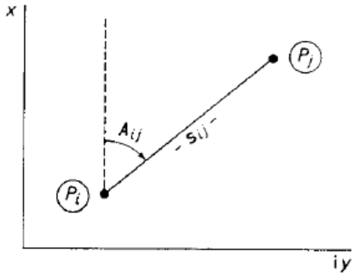


Fig. 3-3

Separating the real and imaginary parts results in:

$$\left.\begin{aligned} R\{\Lambda_{kl}-\Lambda_{ij}\} &= \ln s_{kl} - \ln s_{ij} = \ln \frac{s_{kl}}{s_{ij}} \\ I\{\Lambda_{kl}-\Lambda_{ij}\} &= A_{kl}-A_{ij} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.7c)$$

It will turn out to be more important to consider (3.7) for three points instead of four, and we will consequently introduce a new symbol for this case.

For the points P_i, P_j and P_i, P_k, (3.7) results in the quantity:

$$e^{\Pi_{jik}} = e^{(\Lambda_{ik}-\Lambda_{ij})} = \frac{z_{ik}}{z_{ij}} \quad \ldots\ldots \quad (3.8a)$$

with:

$$\Pi_{jik} = \ln \frac{z_{ik}}{z_{ij}} = \ln \frac{s_{ik}}{s_{ij}} + i(A_{ik}-A_{ij}) \quad \ldots\ldots \quad (3.8b)$$

If we put

$$\left.\begin{aligned} v_{jik} &= \frac{s_{ik}}{s_{ij}} \\ \alpha_{jik} &= A_{ik}-A_{ij} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.8c)$$

we obtain:

$$\boxed{\Pi_{jik} = \ln v_{jik} + i\,\alpha_{jik}} \quad \ldots\ldots \quad (3.8d)$$

In the complex plane we can represent Π_{jik} in the same way as α_{jik} in the real plane, i.e. *with* the direction of rotation. The positive direction is chosen as in Fig. 3-1 and Fig. 3-3, i.e. clockwise. See Fig. 3-4.

Annex 6: Data Snooping

Zie (Baarda, 1968) blz. 28, formule (4.3).

Laat C_p een vector zijn die aangeeft hoe waarnemingen betrokken zijn bij een alternatieve hypothese H_{ap}. Bij data snooping wordt een serie alternatieve hypotheses H_{ai} getoetst, waarin telkens voor één waarneming wordt verondersteld dat deze fout is. Voor ieder hypothese staat dan in de bijbehorende vector C_i op de positie i een 1 en op alle andere posities een 0. De data snooping procedure gaat dan als volgt:

Bereken voor *i = 1 … n*:

$N_i = C_i^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot g_{vv} \cdot g_{xx}^{-1} \cdot C_i$

dat betekent dat N_i het element *ii* van dit matrixproduct is, oftewel $N_i = (g_{xx}^{-1} \cdot g_{vv} \cdot g_{xx}^{-1})_{ii}$.

Dan is de toetsgrootheid voor waarneming x_i:

$\underline{w}_i = C_i^T \cdot g_{xx}^{-1} \cdot g_{vv} \cdot g_{xx}^{-1} \cdot (\underline{x} - A_0)/\sigma\sqrt{N_i}$

Op deze wijze worden nu opeenvolgend alle waarnemingen individueel getoetst op het mogelijke voorkomen van fouten, met het criterium:

$\underline{w}_i^2 < F_{1-\alpha_0;\,1,\,\infty}$

Hierbij wordt voor α_0 een vaste waarde ingevoerd, meestal α_0 =0.001

Annex 7: Ricci Calculus

De publicaties van Tienstra en later ook die van Baarda waren voor veel lezers moeilijk toegankelijk vanwege de gehanteerde indexnotatie. Tienstra gebruikte de zogenaamde Ricci Calculus. Geodeten leerden de Ricci Calculus kennen via de differentiaalmeetkunde. Als geodetische metingen zich over grotere gebieden uitstrekken, worden de effecten gevoeld van de kromming van de aarde. Bij hogere nauwkeurigheid en ook als grote gebieden door metingen bedekt worden, moet men rekening houden met het feit dat de aardas door de polen korter is dan de middellijn van de evenaar. In dat geval wordt de vorm van de aarde benaderd door een ellipsoïde. Dat wil zeggen dat men de doorsnede van de aarde door een ellips beschrijft met de middellijn van de evenaar als lange as en de poolas als korte as. Door deze ellips om de poolas te laten wentelen verkrijgt men dan een ellipsoïde.

Voor geometrische berekeningen op zo’n oppervlak volstaat de Euclidische meetkunde niet meer, men gaat dan over naar de Riemannse meetkunde, de meetkunde op gekromde oppervlakken. Berekeningen worden op gekromde oppervlakken uitgevoerd met de differentiaalmeetkunde, een belangrijke toepassing van de tensoranalyse. Daarin werd de Ricci Calculus gehanteerd. Deze benadering had begin twintigste eeuw grotere bekendheid gekregen doordat Einstein haar toepaste bij de formulering van de Relativiteitstheorie.

Tienstra gebruikte de Ricci notatie waarschijnlijk omdat hij nog niet goed was ingevoerd in de lineaire algebra en de matrixrekening, zie de opmerking hierover in (Hoek 1982). De Ricci notatie heeft een grote uitdrukkingskracht en maakt het mogelijk om via de gebruikte combinatie van basissymbolen en indices vele type grootheden te onderscheiden, daarbij kon men bij de geometrische interpretatie van formules vele typen ruimtes onderscheiden. Hieronder volgt de introductie gegeven in (Tienstra, 1947):

With the new variables X^α, the linear transformation will be given by

$$\begin{aligned} X^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n \\ X^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n \\ &\vdots \\ X^n &= a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots + a_n^n x^n \end{aligned}$$

These formulae can be written down in an abridged way

$$X^\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^\beta x^\alpha \qquad (\beta \rightarrow 1, \ldots, n)$$

It is a proposal of *Einstein*, to suppress the sumsign therefore to write simply

$$X^\beta = a_\alpha^\beta x^\alpha \ (\alpha,\ \beta \rightarrow 1, \ldots n) \tag{3}$$

and to make once for all the agreement, that whenever a letter enters in a product as upper and lower index, the sum over this index has to be taken. Moreover it is convenient in order to avoid the constant repeating of the significance of the used indices as in (3), to agree beforehand on the letters that will be used for denoting a certain set of numbers. In our case we state that the indices

$$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \text{ and eventually } \alpha', \beta', \gamma', \varepsilon' \tag{4}$$

will run from 1 to n. It is to be remarked that between the indices α, β, ... and 1, 2, 3...... n there is quite a difference. The former represent each of the numbers 1 to n, as is agreed upon; the latter are fixed and represent only the number for which they stand.

We may now write (3) as

$$X^\beta = a_\alpha^\beta x^\alpha \tag{5}$$

and this expression has the meaning of a set of n linear equations in the n quantities x^α. In accordance with the agreement about the indices

$$X^\alpha = a_\gamma^\alpha x^\gamma$$

is identical with (3) and therefore it is not essential which letter is used for denoting a certain index, if it is only one of the set (4). It is the *place* of the index that counts. An upper index is also called a contravariant-, and a lower one a covariant index.

As stated in the introduction, the X^α introduced in (5) may be considered as a set of observations themselves and in this paragraph, we will examine accuracy and correlation of these quantities.

We suppose that the determinant on the a_α^β is not zero; in that case the equations can be solved to the x^α. Let the solution be

$$x^\alpha = A_\beta^\alpha X^\beta \tag{6}$$

Between the coefficients a_β^α and A_β^α excists a number of relations. We easily can find them, when we substitute the X^β of (5) in (6). We get

$$x^\alpha = A_\beta^\alpha a_\gamma^\beta x^\gamma \tag{7}$$

We had to replace the index α in (5) by γ, because otherwise both sums in (7) would not be defined uniqually. Indeed when we had not taken this precaution, the result would have been

$$x^\alpha = A_\beta^\alpha a_\alpha^\beta x^\alpha \ ?$$

and the expression is meaningless, because one of the sums is not properly defined.

The coefficient of x^α in (7) being 1 and all the other one 0 we have that

$$A^\alpha_\beta a^\beta_\gamma$$

is 1 as α and γ are equal and 0 as α and γ are different. We write it down as follows :

$$A^\alpha_\beta a^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma \qquad (8)$$

In this expression δ^α_γ is called the " symbol of *Kronecker* " and it is defined by

$$\delta^\alpha_\beta = 0 \quad \text{if} \quad \alpha \neq \gamma$$

and

$$\delta^\alpha_\gamma = 1 \quad \text{if} \quad \alpha = \gamma$$

In substituting reversely x^α of (7) in (5) we get in the same way

$$a^\beta_\alpha A^\alpha_\gamma = \delta^\beta_\gamma \qquad (9)$$

(8) and (9) represent each a set of $n \times n$ equations. If we separate from (8) those equations in which α is 5, we get

$$A^5_\beta a^\beta_1 \equiv A^5_1 a^1_1 + A^5_2 a^2_1 + \ldots\ldots + A^5_n a^n_1 = \delta^5_1 = o$$
$$A^5_\beta a^\beta_2 \equiv A^5_1 a^1_2 + A^5_2 a^2_2 + \ldots\ldots + A^5_n a^n_2 = \delta^5_2 = o$$
$$\vdots$$
$$A^5_\beta a^\beta_5 \equiv A^5_1 a^1_5 + A^5_2 a^2_5 + \ldots\ldots + A^5_n a^n_5 = \delta^5_5 = 1$$
$$\vdots$$
$$A^5_\beta a^\beta_n \equiv A^5_1 a^1_n + A^5_2 a^2_n + \ldots\ldots + A^5_n a^n_n = \delta^5_n = o$$

and with this set we may compute $A^5_1, A^5_2, \ldots A^5_n$ if the a^α_β are given. The above equations are one out of the n sets represented by (8). Each set determines n quantities A^α_β. In an analogous way the relations (9) offer the means to solve the a^β_α, if the A^β_α are known.

In zijn publicatie van 1947 (Tienstra 1947) gaf hij een uitleg van de Ricci Calculus en hoe hij die gebruikte. Deze inleiding, paragraaf 2 van zijn artikel, wordt hier in zijn geheel overgenomen als ondersteuning voor diegenen die de vroegere publicaties nog eens willen doornemen.

Annex 8: De inzet van quaternionen

In (Molenaar 1981) hoofdstuk IV, blz. 33-34 vinden we de volgende definitie van quaternionen:

A point i with coordinates

$$x_i\ ,\ y_i\ ,\ z_i$$

will be described by a quaternion:

$$q_i = 0 + x_i.i + y_i.j + z_i.k \qquad (4.1)$$

with product rules :

$$i.i = j.j = k.k = -1$$
$$i.j = -j.i = k$$
$$j.k = -k.j = i$$
$$k.i = -i.k = j$$

Point j is:

$$q_j = 0 + x_j.i + y_j.j + z_j.k$$

Substraction gives:

$$q_{ij} = q_j - q_i = 0 + (x_j - x_i).i + (y_j - y_i).j + (z_j - z_i).k$$

For q_{ij} the conjugate quaternion is :

$$q_{ij}^T = 0 - (x_j - x_i).i - (y_j - y_i).j - (z_j - z_i).k$$

and the norm :

$$N\{q_{ij}\} = q_{ij} . q_{ij}^T = q_{ij}^T . q_{ij} = l_{ij}^2$$
$$= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2$$

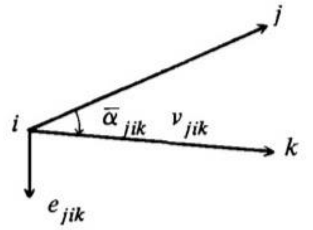
The inverse of q_{ij} with respect to multiplication is :

$$q_{ij}^{-1} = \frac{q_{ij}^T}{N\{q_{ij}\}}$$

where :

$$q_{ij} . q_{ij}^{-1} = q_{ij}^{-1} . q_{ij} = 1$$

Add point k with q_k and $q_{ik} = q_k - q_i$. The left division by q_{ij} is then:



$$Q_{jik} = q_{ik} . q_{ij}^{-1} \qquad (4.2.1)$$

which can also be written as :

$$Q_{jik} = v_{jik} . (cos\,\bar{\alpha}_{jik} + e_{jik} . sin\,\bar{\alpha}_{jik}) \qquad (4.2.2)$$

v_{jik} is the length ratio of side i, j and side i, k and $\bar{\alpha}_{jik}$ is the angle between these sides, whereas e_{jik} is the unit vector in the direction normal to plane j, i, k. This expression demonstrates in which way the measurable quantities can be entered in the coordinate computation when using quaternion algebra.

In deze beschrijving is duidelijk te zien dat de grootheid Q_{jik} dezelfde structuur heeft als de grootheid Π_{jik} in het platte vlak. Door de productregels voor quaternionen zijn vermenigvuldigingen niet commutatief, dus $a.b \neq b.a$. Hierdoor wordt de toepassing van quaternion-algebra aanzienlijk gecompliceerder dan de algebra van de complexe getallen in het platte vlak.

In (Quee 1983) vinden we in hoofdstuk 2, blz. 32 hoe quaternionen gekoppeld worden aan lengte- en theodolietmeting in het veld.

By means of a theodolite established in P_i, the two "polar coordinates" of the spatial vector $P_i P_k$ can be measured : the zenith angle $\underline{\mathfrak{z}}_{ik}$ and the direction $\underline{r}_{ik}$:

$\underline{\mathfrak{z}}_{ik}$ is the angle between the vector $P_i P_k$ and the upward direction of the first axis of the theodolite set up in P_i ;	**(2.6)**

$\underline{r}_{ik}$ is the angle between the zero direction of the horizontal circle and the projection of the vector $P_i P_k$ on the plane of that circle.	**(2.7)**

Since the first axis of the theodolite is perpendicular to the horizontal circle, the local system (orthogonal trihedral i, j, k) can be defined by linking it up as follows with the theodolite : (see fig. 14)

-the i-vector lies in the plane of the horizontal circle, in the "zero direction"

-the k-vector lies in the part of the first axis "pointing downwards"

-the j-vector completes a right-handed system i, j, k. **(2.8)**

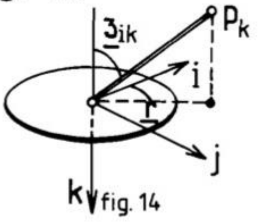


fig. 14

By (1.18), the spatial vector $P_i P_k$ can now be expressed as quaternion q_{ik} with a scalar part $= 0$, by conversion of the rectangular coordinate differences x, y, z to polar coordinates s, r, $\mathfrak{z}$:

$$\underline{q}_{ik}^{(i)} = 0 + i\, \underline{s}_{ik} \cos \underline{r}_{ik} \sin \underline{\mathfrak{z}}_{ik} + j\, \underline{s}_{ik} \sin \underline{r}_{ik} \sin \underline{\mathfrak{z}}_{ik} - k\, \underline{s}_{ik} \cos \underline{\mathfrak{z}}_{ik} \qquad (2.9)$$

$$\downarrow \quad \sqrt{N\{\underline{q}_{ik}^{(i)}\}} = \underline{s}_{ik}$$

Als uit punt P_i ook metingen zijn verricht naar een punt P_j volgt daaruit het quaternion q_{ij} en daarmee kan dan weer de grootheid Q_{jik} berekend worden. Hierbij merken we wel op dat in beide bovengenoemde situaties de hoek α_{jik} en de lengteverhouding v_{jik} nu gemeten zijn tussen de ruimtelijke punten P_i, P_j en P_k. Dus ze zijn niet geprojecteerd op het horizontale vlak, zoals dat het geval is bij Π_{jik} .

Referenties:

(Aitken 1936) Aitken, A. C.: *On least squares and linear combination of observations.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 55: pp. 42–48 (1936).

(Alberda 1983) Alberda, J. E.: *Inleiding Landmeetkunde.* Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1983, p. 517.

(Alberda 2005) Alberda, J. E.: *Professor Willem Baarda 1917- 2005 – Een beknopt overzicht van zijn wetenschappelijke werk*, NCG Jaarverslag 2005, pp. 47–64.

(Alberts 2000a) Alberts, G.: *David van Dantzig, wiskundig omnivoor*, Nieuw Archief voor Wiskunde 5/1 nr. 3, september 2000, pp. 288–293.

(Alberts 2000b) Alberts, G.: *Een eeuw wiskunde en werkelijkheid – De opkomst van het wiskundig modelleren*, NAW 5/1 nr.1 maart 2000, pp. 59–67.

(Alberts 2000c) Alberts, G.: *Twee geesten van de wiskunde – Biografie van David van Dantzig*, CWI Publicaties Varia, Amsterdam, 2000.

(Baarda 1947) Baarda, W.: *Betekenis en waarde van coördinaten in de landmeetkunde.* Openbare les, TH-Delft. Brill, Leiden, 1947, 16 pp.

(Baarda 1952) Baarda, W.: *Werk en werkwijze van de geodetisch-ingenieur.* Inaugurele rede, TH-Delft. Brill, Leiden, 1952, 17 pp.

(Baarda 1957) Baarda, W.: *Aansluitmethoden en vereffening.* Tijdschrift voor Kadaster&Landmeetkunde, 1957–2, pp. 45–79.

(Baarda en Alberda, 1962) Baarda, W. en J. Alberda: *The connection of geodetic adjustment procedures with methods of mathematical statistics.* Bulletin Géodésique, 1962, pp. 325–345.

(Baarda 1960) Baarda, W.: *De betekenis van varianties van coordinaten bij berekening van puntsbepalingssystemen in het platte vlak.* L.G.R., Delft, 1960.

(Baarda 1962) Baarda, W.: *A Generalization of the Concept Strength of Figure.* Report to IAG- SSG 1.14 L.G.R., Delft, 1962.
Zie ook (Baarda 1967a), appendix bij (Baarda 1967).

(Baarda 1966) Baarda, W.: *Schrankingstransformaties* – L.G.R., Delft, 1966.

(Baarda 1967) Baarda, W.: *Statistical Concepts in Geodesy* – Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. M, Delft 1967.

(Baarda 1968) Baarda, W.: *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks.* Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 5, Delft, 1968.

(Baarda 1969) *Puntsbepalingssystemen in het platte vlak. Berekening van complexe getallen.* LGR, Delft, 1969. Herzien deel 1 en 2 – 1966, deel 3 –1967 deel 4 - 1968/1969.

(Baarda 1973) Baarda, W.: *S-transformations and Criterion Matrices*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 5, No. 1, Delft 1973. 168 pp.

(Baarda 1977) Baarda, W.: *Mathematical Models.* OEEPE Publ. Off. No. 11, 1977, pp. 73–101.

(Baarda 1997) Brief.

(Baarda 2002): *Jacob Menno Tienstra – Zonder titel.* In: Delfts goud: leven en werk van achttien markante hoogleraren, K. F. Wakker, red. TU-Delft: Delft, 2002, pp. 123–134.

(Brouwer 1985) Brouwer, F. J. J: *On the principles, assumptions and methods of geodetic very long baseline interferometry*. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 7, No. 4, Delft, 1985, 180 pp.

(Cramer 1957) Cramer, H.: *Mathematical methods of statistics.* Princeton University Press, seventh printing, 1957, 575 pp.

(Gauss 1828) C. F. Gauss: *Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.* Henricus Dieterich, Göttingen, 1828.

(HTW '38) *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster.* Algemene Landsdrukkerij, 's Gravenhage, 1938, 110 pp.

(HTW '56) *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster.* Ministerie van Financiën, 's Gravenhage, 1956, 372 pp.

(Daalen 1985) Daalen, D. T. van: *De Delfste School in beweging – over Granpré, Baarda en het Melkmeisje.* Lustrum boek 1985, Landmeetkundig Genootschap Snellius, Delft, 1985, pp. 253-271.

(Dantzig 1945-46) Dantzig, D. van: *Wiskunde, logica en ervaringswetenschappen*, Syllabus college logica, Studium Generale TH Delft, 1945/46).

(Dantzig 1947) Dantzig, D. van: *Waarschijnlijkheidsrekening: college 1946-1947.* Syllabus Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1947, 118 pp.

(Dantzig 1947) Dantzig, D. van: *General procedures of empirical science*, Synthese 5(1947) pp. 441–445.

(Helmert 1907) Helmert, F. R.: *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate: mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente*. B. G. Teubner, second edition, 1907.

(Hoek, 1982) Hoek, H. C. van der: *Baarda s werk.* In: *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht. Vol. I.* Staf LGR (eds.), Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, TU Delft, Delft, 1982, pp. 11-23.

(Hogg en Craig 1970) Hogg, R.V., A.T. Craig: *Introduction to mathematical statistics,* third edition. Collier Macmillan International Editions, London – New York, 1970, 415 pp.

(Kruif 2019), Kruif, J. de: *persoonlijke herinneringen.* E–mail 2019.

(Legendre 1805) Legendre, A. M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* F. Didot, Paris, 1805.

(LGR 1982) Staf LGR (eds.): *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht.* Vol. I. en II, Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, TU Delft, Delft, 1982.

(LGR Staf 1982) Staf van LGR: *The Delft approach for the design and computation of Geodetic networks.* In: *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht. Vol. I.* Staf LGR (eds.), Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, TU Delft, Delft, 1982, pp. 202-274.

(Mierlo 1982) Mierlo, J. van: *Internationale Ontwikkelingen op het Gebied van de Mathematische Geodesie.* NGT-Geodesia, 1982, pp. 199-203.

(Molenaar 1972) Molenaar, M.: *Een Analyse van het Gebruik van Doppler Satellieten in een Meetopzet met Simultane Waarnemingen,* Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, TU Delft, 1972, 58 pp.

(Molenaar 1981) Molenaar, M.: *A Further Inquiry into the Theory of S–Transformations and*

Criterion Matrices. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 7, No. 1, Delft, 1981.

(Molenaar 1982) Molenaar, M.: *Some Aspects of Sequential Processing of Photogrammetric Bundle Blocks.* ITC Journal 1982–4, pp. 398-411.

(Pope 1971) Pope, A. J.: *Transformation of Covariance Matrices Due to Changes in Minimal Control.* In: AGU Fall Meeting, San Francisco, California, December 9, 1971.

(Quee 1983) Quee, H.: *Quaternion Algebra Applied to Polygon Theory in Three Dimensional Space.* Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 7, No. 2, Delft, 1983.

(Schermerhorn en van Steenis, 1964): Schermerhorn, W. en H. J. van Steenis: *Leerboek der landmeetkunde,* 4de druk. Argus, Nederland, Den Haag, 1964, 573 pp.

(Stigler 1986) Stigler, S.M.: *The History of Statistics – The Measurement of Uncertainty before 1900.* The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge-Massachusetts, London-England, 1986, 410 pp.

(Teunissen 1985) Teunissen, P. J. G.: *The geometry of geodetic inverse linear mapping and non-linear adjustment.* Neth. Geod. Comm., Publ. on Geodesy, New Series, Vol. 8, No. 1, Delft, 1985, 177 pp.

(Teunissen 2000) Teunissen, P. J. G.: *A brief account on the early history of adjusting geodetic and astronomical observations* (De Hollandse Cirkel 2 nr. 1, pp. 12–17, april 2000).

(Tienstra 1931) Tienstra, J. M.: *Het gebruik van de methode der kleinste kwadraten in de landmeetkunde.* Openbare les, Landbouwhogeschool Wageningen, Veenman&Zonen, Wageningen, 1931. 19 pp.

(Tienstra 1933) Tienstra, J. M.: *Nets* of *Triangles Consisting* of *Points with Circular Error-Curves.* Proceedings Royal Acad. Amsterdam, Vol. XXXVI, 1933.

(Tienstra 1935) Tienstra, J. M.: *Fouten theorie en vereffening met betrekking tot de landmeetkunde,* Inaugurele Rede, TH Delft. Waltman, Delft. 1935, 22pp.

(Tienstra 1937) Tienstra, J. M.: *Beschouwingen over de nauwkeurigheid van de veelhoekmetingen.* Papers gepresenteerd op het Congres van de Nederlandse Landmeetkundige Federatie, 1937, 1939.

(Tienstra 1947) Tienstra, J. M.: *An extension of the technique of the methods of least squares to correlated observations.* Bulletin Géodésique, 1947. pp. 301–335.

(Tienstra 1948) Tienstra, J. M.: *The foundation of the calculus of observations and the method of least squares.* Bulletin Géodésique, 1948. pp. 290–306.

(Tienstra 1951) Tienstra, J. M.: "*Waarnemingsrekening delen I en II"* Syllabus TH Delft. 1951.

(Tienstra 1956) Tienstra, J. M.: *The theory of the adjustment of normally distributed observations.*

(Vermaat 1970) Vermaat, E.: *Driehoek en Viervlak.* Afstudeerscriptie Lab. voor Geodesie, TH Delft, l970

(Vrededuin 1965) Vrededuin, P.G.J.: *Uitbreiding van getalsystemen*. Euclides, 41ste jaargang, 1965, pp. 1–19.

Illustraties

Fig. 1: RD net, eerste orde net 1888 -1904: https://kartoweb.itc.nl/geometrics/Bitmaps/refsurface%203.5d.gif

Fig. 2: Definitie (X, Y) coördinaten: (Baarda 1973, bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 3: Meting van een lengtebasis: (Schermerhorn en van Steenis 1964, bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 4: Links: Wild Heerbrugg T2 theodolite, 1962: homepage of Nicolàs de Hilster. Rechts: Theodoliet Schema: https://www.researchgate.net/publication/283666278_Horizontal_scale_calibration_of_theodolites_and_total_station_using_a_gauge_index_table/figures?lo=1 (bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 5: Meting van een veelhoek (Roel Nicolai).

Fig. 6: https://mindfulbalance.files.wordpress.com/2012/01/angle.gif
Diagram: lengtemeting met een basisbaak: (Schermerhorn en van Steenis 1964, bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 7: Snelliuspunt: (Roel Nicolai).

Fig. 8: Extract uit (Baarda 1957).

Fig. 9: Kringnetten (Baarda 1977, bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 10: De geometrische weergave van de specificatie van toetsgrootheden w_i (bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 11: Standaardellipsen afhankelijk van S-basis: (Baarda 1968).

Fig. 12: De structuur van criteriummatrix H^a: (Baarda 1973, bewerkt door Roel Nicolai).

Fig. 13: Precisie Nederlands RD-net getoetst tegen criteriummatrix: (Baarda 1973).

Fig. A3: Geometrische voorstelling X-, Y- en t-ruimte.

Fig. A4: Normale verdeling: (Roel Nicolai).

De volgende bijlagen maken geen deel uit van deze publicatie, maar kunnen apart worden besteld bij:

Stichting De Hollandse Cirkel
Postbus 9046
7300 GA Apeldoorn
Email: info@hollandsecirkel.nl

Samenvatting Bijlage I:

Deze bijlage bevat een aantal publicaties die gezamenlijk een beeld geven van de context waarin de ontwikkeling van de Delftse School plaatsvond:

I.a) geeft een beknopte beschrijving van leven en werk van Jacob Menno Tienstra door Baarda. Deze beschrijving laat zien hoe de eerste ideevorming tot stand kwam. Vooral de worsteling met het moderne modelbegrip en de inzet van de wiskunde daarbij speelt een belangrijke rol bij de wijze waarop Tienstra de kleinste-kwadratenmethode benadert. Zijn denken heeft een grote invloed gehad op het latere werk van Baarda.

I.b) De worsteling van Tienstra past in die van een bredere groep van denkers over het modelbegrip en de relatie daarvan met de inzichten van de recent ontwikkelde mathematische statistiek. Hoe verhoudt de exactheid van de wiskunde zich tot het stochastische karakter van meetreeksen? Daarbij komt de naam van David van Dantzig naar voren, vooral hij heeft een grote invloed gehad op het denken van Tienstra en Baarda. De aanpak van deze vraagstelling was zeer moeizaam, vooral omdat er nog geen goed begrippenapparaat was voor de verwoording van de geïdentificeerde problemen. (Alberts 2000b) beschrijft deze worsteling en de rol die Van Dantzig daarin speelde.

I.c) In de hoofdtekst van deze monografie is weinig of geen aandacht besteed aan denkbeelden die elders ontstonden over de behandelde problematiek. Jan van Mierlo was een oud-medewerker van Baarda en werd later hoogleraar in Duitsland. Hij geeft een korte schets van die andere benaderingen.

I.d) Diederik van Daalen geeft een speelse beschouwing over de vraag of we echt met schoolvorming te maken hebben als we de Delftse School noemen. Hij was een aantal jaren medewerker van Baarda. Daardoor was hij goed ingevoerd in de gedachtewereld van de Delftse groep. Hij bleef als wiskundige toch een relatieve buitenstaander, zodat hij in een geschikte positie was om het werk op enige afstand te beschouwen.

I.e) Ter gelegenheid van Baarda's tachtigste verjaardag in 1997 werden zijn vier promovendi en de voorzitter van de Vereniging voor Geodesie gevraagd om een bijdrage te leveren aan een speciale uitgave van het vaktijdschrift NGT-Geodesia. Als dank hiervoor kregen de schrijvers een persoonlijke brief van Baarda. Daarin ging hij kort in op de bijdragen, waarna hij beschreef hoe hij nog steeds worstelde met het coördinaatbegrip in de moderne Geodesie. Dit laat zien dat deze vraag hem zijn leven lang, tot op hoge leeftijd, heeft beziggehouden.

Inhoud Bijlage I

a) (Baarda, 2002a): *Jacob Menno Tienstra – Zonder titel.* In: Delfts goud: leven en werk van achttien markante hoogleraren, K. F. Wakker, red. TU-Delft: Delft, 2002, pp. 123–134.

b) (Alberts 2000b) Alberts, G.: *Een eeuw wiskunde en werkelijkheid – De opkomst van het wiskundig modelleren*, NAW 5/1 nr.1 maart 2000, pp. 59–67.

c) (Mierlo 1982) Mierlo, J. van: *Internationale Ontwikkelingen op het Gebied van de Mathematische Geodesie.* NGT-Geodesia, 1982, pp. 199–203.

d) (Dalen, 1985) Dalen, D. T. van: *De Delftse School in beweging – over Granpré, Baarda en het Melkmeisje.* Lustrum boek 1985, Landmeetkundig genootschap Snellius, Delft, 1985, pp. 253–271.

e) (Baarda 1997) brief.

Samenvatting Bijlage II

In deze bijlagen komen directbetrokkenen bij de ontwikkeling van de Delftse School aan het woord:

II.a) Baarda werd door de *Organisation européenne d'études photogrammétriques expérimentales* (toen nog *O.E.E.P.E.*, later *EuroSDR*), uitgenodigd om een feestrede te houden ter gelegenheid van het 25-jarig bestaan van de organisatie. Hij gaf een speels ingeleid overzicht van de ontwikkeling van zijn ideeën tot eind 70er jaren. Daarmee bestreek hij de meest relevante onderwerpen, voor de toen geldende landmeetkundige praktijk.

II.b) Jouke Alberda is bijna van het begin af aan een van de meest directe medewerkers van Baarda geweest. Hij heeft de hele worsteling om de theorievorming van zeer nabij meegemaakt en was daar zeer nauw bij betrokken. Bij het overlijden van Baarda geeft hij een overzicht op het werk, waarbij hij regelmatig ook zijn eigen visie laat doorschemeren.

II.c) De staf van het LGR stelt met bijdragen van velen twee volumes samen onder de titel *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht.* Deze bundel werd uitgegeven ter gelegenheid van het feit dat Baarda met emeritaat ging. Daarin geeft de LGR-staf zelf een mooi samenvatting van de ideeën van de Delftse School op dat moment, aan de hand van een uitgewerkt voorbeeld.

Inhoud Bijlage II

a) (Baarda, 1977) Baarda, W.: *Mathematical Models.* OEEPE Publ. Off. No. 11, 1977, pp. 73-101.

b) (Alberda, 2005) Alberda, J.E.: *Professor Willem Baarda 1917–2005 - Een beknopt overzicht van zijn wetenschappelijke werk*, NCG Jaarverslag 2005, pp. 47-64.

c) (LGR Staf, 1982) Staf van LGR: *The Delft approach for the design and computation of geodetic networks.* In: *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht. Vol. I.* Staf LGR (eds.), Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek, TU-Delft, Delft, 1982. pp. 202-274.